TD$_9$ Ensembles

Exercice 1

Écrire en extension les ensembles suivants

1. $\{n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{2} < n \leq 2\pi\}$,
2. $\{x^2, \quad x \in \{-1, 1, 2\}\}$,
3. $[\![1, 3]\!] \times [\![-1, 1]\!]$,
4. $[\![1, 3]\!] \times \{-1, 1\}$,
5. $([\![1, 3]\!] \cup \{5\}) \cap ([\![2, 6]\!] \cup \{1\})$.

Exercice 2

On définit les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$E = \left\{ \left(\frac{x}{2} - 2, 2x + 1 \right), \quad x \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad F = \{(y, 4y + 9), \quad y \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $E = F$.

Exercice 3

On définit les deux parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 4x - y = 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(t + 1, 4t + 3), \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

A et B sont-ils respectivement définis en extension ou en compréhension ? Montrer que $A = B$. Quelle est la nature géométrique de cet ensemble ?

Exercice 4

Si A est une partie d'un ensemble E, on définit l'indicatrice de A comme la fonction

$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{l} E \longrightarrow \{0, 1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

1. Représenter le graphique l'indicatrice $\mathbf{1}_{[-1,1]}$.
2. Si A et B sont deux parties de E, montrer les égalités
   (a) $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.
   (b) $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
   (c) $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

   (*Indication : pour montrer que deux fonctions f et g sont égales, on montre que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.*)

Exercice 5

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et de B par

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

1. Représenter l'ensemble $A \Delta B$ sur un dessin.
2. Que vaut $A \Delta E$? $A \Delta A$?
3. Montrer que $A \Delta B = B \Delta A$.
4. Donner une partie $X \in \mathcal{P}(E)$ telle que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on ait $A \Delta X = A$.
5. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, donner une partie $A' \in \mathcal{P}(E)$ telle que $A \Delta A' = E$.
6. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.