Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1A – Année 2023/2024
M. Marmorat

DS 4 – Mathématiques

Mercredi 13 Décembre 2023

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à *encadrer proprement* les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

Évitez les ratures (effacez ou barrez d'un simple trait d'éventuelles erreurs, utiliser un brouillon si possible).

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de trois exercices, et d'un exercice bonus.

Exercice 1 (Questions de cours).

1. Étudier la limite lorsque $x \to 1$ de la quantité $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.
2. Étudier la limite lorsque $x \to +\infty$ de la quantité $g(x) = \dfrac{3e^{2x} - 2xe^{x} + 1}{e^{2x} - 1}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 2^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$
.
4. (Python) Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, et pour tout $n > 0$,
$$u_{n+2} = 3nu_{n+1} - u_n.$$
   (a) Proposer l'implémentation d'une fonction récursive `suite` qui prenne en argument un entier n et qui renvoie u_n.
   (b) Combien d'appels récursifs sont effectués pour calculer u_6 ? Représenter rapidement l'arbre de récursion généré sur un schéma.
   (c) Quelle implémentation alternative serait plus efficace ? Proposer une fonction `suite2` mettant en place cette stratégie.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan^2(x) + \cos(x)$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Justifier que l'on peut limiter l'étude de f à l'ensemble $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^3(x) \leq 1$, et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^3(x) \leq 2$.
4. Quel est le signe de $\sin(x)$ lorsque $x \in D$?
5. Justifier que f est dérivable sur D et que pour tout $x \in D$, on a
$$f'(x) = \frac{\sin(x)(2 - \cos^3(x))}{\cos^3(x)}.$$
6. Déduire des questions précédentes que $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$ sur D.
7. Dresser le tableau de variations de f sur D en y faisant apparaître les limites appropriées (on justifiera succintement).

8. Tracer la courbe de f entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la quantité

$$S(a) = \sum_{k=0}^{n} k a^k.$$

Le but de cet exercice est de trouver une expression simple $S(a)$, lorsque $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $S(1)$.
2. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \end{array}.$$

   (a) Justifier rapidement que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x f'(x) = S(x).$$

   (b) Déterminer une expression simple de $f(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

   (c) En déduire une expression simple de $f'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. Déduire des questions précédentes une formule simple donnant l'expression de $S(a)$ en fonction de a et de n.

Exercice 4 (En bonus, si le reste est terminé).

1. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pour tout $k > 2$, on ait

$$\frac{1}{k(k^2-4)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-2} + \frac{c}{k+2}.$$

2. En déduire une expression simple de la somme

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k^2-4)}$$

lorsque $n \geq 3$.