TD_{10} Raisonnements

1 Raisonnements par contraposée

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si n^2 est impair alors n est impair.

Exercice 2
Le but de l'exercice est de démontrer la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^\star$:
si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

1. Écrire la contraposée de l'implication précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $r \in \{1, 3\}$ (pourquoi ?), prouver la contraposée.
3. Conclure.

2 Raisonnements par l'absurde

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est le carré d'un nombre entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.

Exercice 4
Soit $n \geq 1$. On se donne $n+1$ nombres réels $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$.
On veut montrer par l'absurde qu'il existe deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $1/n$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs, écrire la propriété que l'on cherche à démontrer.
2. Écrire la négation de cette assertion.
3. Écrire une démonstration par l'absurde de la propriété (on pourra démontrer que $x_n - x_0 > 1$).
4. Écrire une autre démonstration de la propriété en utilisant le principe des tiroirs.

3 Raisonnements par analyse-synthèse

Exercice 5
On cherche à résoudre l'équation

$$\sqrt{x+1} = x \qquad (E_1)$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner le domaine de validité de (E_1).
2. Montrer que si x est solution de (E_1) alors $x^2 - x - 1 = 0$.
3. Conclure.

Exercice 6

On cherche à résoudre l'équation
$$\overline{z} = z^5 \tag{E_2}$$
d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. On suppose que $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E_2). Montrer qu'alors $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.
2. Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $e^{i\theta}$ soit solution de (E_2). Montrer que $\theta \in \left\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$.
3. Conclure.

Exercice 7

Montrer qu'il existe une fonction polynomiale f de degré 2 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = x$.

4 D'autres raisonnements

Exercice 8

On rappelle qu'on dit d'un nombre entier qu'il est premier s'il admet exactement 2 diviseurs distincts : 1 et lui-même. Par exemple, 2, 3, 5, 7, 11, 31, 67 sont des nombres premiers, mais 1, 4, 6, 9, 243 ne sont pas des nombres premiers (pourquoi ?).

Dans cet exercice, on démontre qu'il existe une infinité de nombres premiers, en reprenant la démonstration d'Euclide (300 avant J.C.).

1. La démonstration est souvent présentée comme une preuve par l'absurde, de la manière suivante. Supposons, par l'absurde, qu'il existe un nombre fini $N \in \mathbb{N}$ de nombres premiers. Notons les $p_1, p_2, \ldots, p_N$ et considérons le nombre $S = p_1 p_2 \ldots p_N + 1$.
   (a) Existe-t-il une valeur de $k \in [\![1, N]\!]$ telle que p_k divise S ?
   (b) Conclure.
2. En réalité, en utilisant les mêmes arguments, on peut prouver directement le résultat, sans utiliser de raisonnement par l'absurde. Voyez-vous comment ?