TD$_{11}$ Applications

1 Antécédents, images, injections, surjections

Exercice 1

Dans cet exercice, on cherche à déterminer graphiquement des images et des antécédents d'éléments par une fonction.

1. On donne le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ sur la figure 1. Déterminer graphiquement :
   — L'image de 0 par f,
   — Les antécédents de 0 par f,
   — L'image de -1 par f,
   — Les antécédents de -1 par f,
   — Les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = 4$,
   — Les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) > 2$.

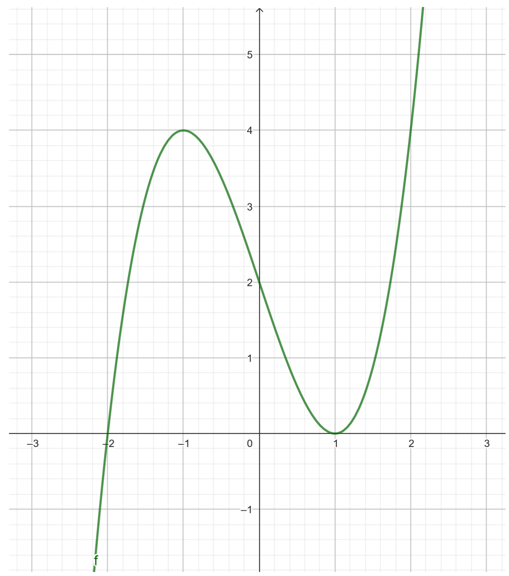

FIGURE 1 – Courbe représentative de f

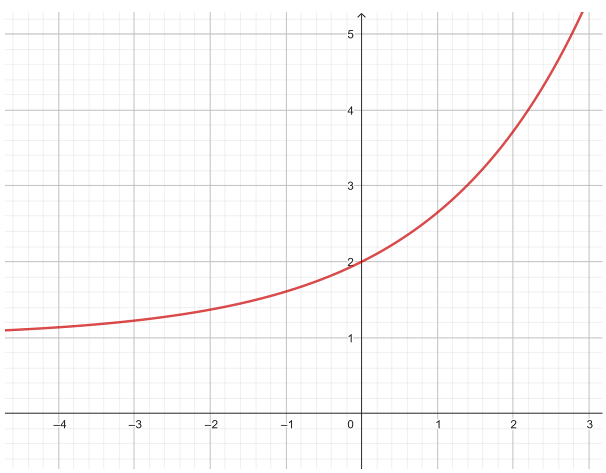

FIGURE 2 – Courbe représentative de g

2. On donne le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \exp(x/2)$ sur la figure 2. Déterminer graphiquement :
   — $f([0, 2])$
   — $f(]-\infty, 0[)$

Exercice 2

On considère les fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par $f(n) = n + 1$ et $g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ n - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
3. Les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Exercice 3
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (2x+y, x+z, y+z).$$

1. Déterminer les antécédents de $(3,0,0)$ par f.
2. Montrer que f est bijective.

2 Bijections

Exercice 4
Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}.$$

1. Montrer que f est correctement définie.
2. Montrer que f est une bijection.

Exercice 5
Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x+x^2} \end{array}.$$

1. Montrer que f est correctement définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f.
3. f est-elle injective sur son domaine de définition ? Pourquoi ?
4. Préciser un intervalle le plus grand possible sur lequel f est injective.
5. (a) Donner l'allure graphique de f.
   (b) Déterminer graphiquement $f(\mathbb{R})$.
6. Donner deux intervalles I et J tels que f réalise une bijection de I dans J.

Exercice 6
Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}.$$

1. Montrer que f est correctement définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de f.
3. Étudier les variations de f.
4. Donner l'allure graphique de f.
5. Déterminer graphiquement $f(\mathbb{R})$.
6. Donner deux intervalles I et J tels que f réalise une bijection de I dans J.

Exercice 7
On considère la fonction f d'expression

$$f(x) = -\ln|(x+1)(x+2)|.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier les variations de f.
3. Déterminer deux intervalles I et J tels que f soit une bijection de I sur J.

3 Bijection réciproque

Exercice 8
Calculer $\arccos(\cos 2\pi/3)$, $\arccos(-\cos 2\pi/3)$ et $\arccos(4\pi/3)$.

Exercice 9
Soit la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de g.
2. Pour $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 1$, résoudre l'équation $g(x) = y$.
3. En déduire que g est bijective sur des ensembles à préciser, et exprimer sa bijection réciproque g^{-1}.

Exercice 10
Montrer que la fonction définie par $h(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ est bijective sur des ensembles à préciser et exprimer sa bijection réciproque.

Exercice 11 (Suite de l'exercice 5)
Exprimer la réciproque de f en précisant l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée.

Exercice 12 (Sinus hyperbolique)
On étudie la fonction sinus hyperbolique définie par

$$\sinh : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}.$$

Le sinus hyperbolique est parfois aussi noté sh. On peut faire le lien entre cette formule et la seconde formule d'Euler donnant l'expression du sinus.

1. Etudier les variations de sinh sur $\mathbb{R}$ (penser à étudier une parité éventuelle).
2. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1} \end{array}$.
   (a) Montrer que f est bien définie.
   (b) Calculer $\sinh \circ f$ et $f \circ \sinh$.
   (c) Conclure.

Exercice 13 (Dérivée de la bijection réciproque)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une application bijective et dérivable. On rappelle que sa bijection réciproque f^{-1} vérifie

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J \text{ et } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I. \tag{1}$$

1. Soit $y \in J$, de sorte que $y = f(x)$ où $x \in I$ est unique. On admet que si $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y = f(x)$. En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées et (1), montrer que
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$
2. Que donne la formule que vous venez d'obtenir avec les bijections usuelles et leurs réciproques : exp et ln, les fonctions carrées et racine, la fonction inverse ?
3. Montrer que les fonctions arcsin, arccos et arctan sont dérivables sur des intervalles à préciser et calculer leurs dérivées.