TD$_{13}$ Matrices

1 Calculs algébriques

Exercice 1 (∞∞)
Expliciter la matrice M dans les cas suivants

1. $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ avec $m_{i,j} = i - j + 1$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$ et $j \in [\![1,4]\!]$,
2. $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{R})$ avec $m_{i,j} = \max(i,j)$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$ et $j \in [\![1,3]\!]$.

Exercice 2 (∞∞)
Dans chacun des cas suivants, lesquels des neuf produits formés à partir de deux des matrices suivantes sont réalisables ? Que valent alors ces produits (présentez vos résultats dans un tableau à double entrée) ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (∞∞)
Lorsque c'est possible, calculer les produits AB et BA dans chacun des cas suivants

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4 (•∞)
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on ne sait pas si elles commutent). Développez les produits matriciels suivants

1. $(A+B)(5A-2B)$,
2. $2(A-I_n)(A+2I_n)$,
3. $(A+I_n)(A+2I_n)(A+3I_n)$,
4. $B(A+B) - A(A+B)$,
5. $B(A+B) - (A+B)A$,
6. $(A+B)^2$,
7. $(A+B)^3$,

Exercice 5 (●○○)
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, c'est-à-dire telles que $AB = BA$. Développez les produits matriciels suivants

1. $(A+B)(5A-2B)$,
2. $B(A+B) - A(A+B)$,
3. $B(A+B) - (A+B)A$,
4. $(A+B)^2$,
5. $(A+B)^3$,

Exercice 6 (●○○)
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Factoriser, si possible, les expressions suivantes

1. $A^2 - I_n$,
2. $2A^2 + 4A + 2I_n$,
3. $-A^2 + 3A$,
4. $A^2 - B^2$,
5. $A^3 - B^3$.

Exercice 7 (●●○)
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta. \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tous θ et $\theta' \in \mathbb{R}$, $A_\theta A_{\theta'} = A_{\theta+\theta'}$.
2. En déduire une expression simple de $(A_\theta)^n$ pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice A_θ est inversible et déterminer son inverse. Vérifier par le calcul.
4. Application : calculer simplement

(a) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{2023}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{128}$ (c) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{327}$

Exercice 8
Montrer que toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique (on raisonnera par analyse synthèse).

2 Équations matricielles

Exercice 9 (●○○)
1. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Résoudre l'équations d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $3A - 2X = B$.

2. Déterminer deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 (●○○)
Déterminer toutes les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

3 Puissances de matrices

Exercice 11 (●○○ Conjecture et récurrence)
Calculer les puissances des matrices suivantes, en conjecturant sur des petits exposants puis en effectuant une démonstration par récurrence.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
4. $J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

Exercice 12 (●●○ Polynôme annulateur et récurrence)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A^2 = 3A - 2I_3$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux entiers α_n et β_n tels que
$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3.$$
Exprimer α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n.
3. Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
4. En déduire l'expression de α_n puis de β_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de A^n en fonction de A, I_3 et n.

Exercice 13 (●●○)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux entiers a_n et b_n tels que
$$A^n = a_n A + b_n I_2.$$
3. En déduire l'expression de A^n pour tout entier n.

Exercice 14 (●●● Binôme de Newton)
Calculer les puissances des matrices suivantes

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{C}$,
3. $C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 15 (●●○)
Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

On note $I = I_3$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A en fonction de a, I et J.
2. Déterminer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. En déduire l'expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 (●●● Suite matricielle)
On considère les 3 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = -1$ et les relations de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = & -u_n + 2v_n - w_n, \\ v_{n+1} = & -v_n + 2w_n, \\ w_{n+1} = & -w_n. \end{cases}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$ et en déduire l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 17 (●●●)

1. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   et I la matrice identité d'ordre 3.
   (a) On pose $J = M - I$. Calculer J^2 en fonction de J.
   (b) Montrer par récurrence qu'il existe une suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

   $$M^n = I + u_n J,$$

   et exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (c) Calculer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Déterminer M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2. Les poules pondent des oeufs que l'on classe suivant trois calibres A, B et C (les petits, les moyens et les gros).
   - Si une poule pond un oeuf de calibre A, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probabilités respectives de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$.

- Si une poule pond un oeuf de calibre B, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probabilités respectives de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.
- Si une poule pond un oeuf de calibre C, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probabilités respectives de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

Pour un entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n respectivement les probabilités que le n-ème oeuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

(a) Calculer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire une matrice $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = UX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Exprimer U en fonction de M et en déduire l'expression de U^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

(c) On suppose que le premier oeuf pondu est de calibre C. Déduire des questions précédentes l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

4 Inversion de matrices

4.1 Le cas des matrices d'ordre 2

Exercice 18 (●○○)

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible, et pour celles qui le sont, déterminer leur inverse. Vérifier dans ce cas que $AA^{-1} = I_2$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

4.2 Utilisation d'un polynôme annulateur

Exercice 19 (●○○)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Dans chacun des cas suivants, on suppose que A vérifie la relation polynomiale donnée. Montrer dans chacun des cas que A est inversible, et donner son inverse.

1. $A^2 + 3A - 2I_n = 0$,
2. $A^2 + 6A + 8I_n = 0$,
3. $A^{12} + I_n = 0$,
4. $A^3 - 4A^2 + 3I_n = 0$.

Exercice 20 (●○○)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 - A^2 + 2A + 11I_3 = 0$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 21 (●●○)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par $a_{i,j} = 0$ si $i = j$, 1 sinon, pour tout $i, j \in [\![1, 4]\!]$.

1. Déterminer la matrice $A + I_4$. Calculer $(A + I_4)^2$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

3. Plus généralement, on suppose que $n > 1$ et on donne $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $b_{i,j} = 0$ si $i = j$, 1 sinon, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que B est inversible et donner son inverse.

Exercice 22 (●○○)

1. Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices non nulles telles que $AB = 0$. Montrer que ni A ni B ne sont inversibles.
2. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $C^2 + C = 0$. A quelle condition C est-elle inversible ?

4.3 Caractérisation par le rang et la méthode de Gauss

Exercice 23 (●○○)
Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles

1. $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
3. $H = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
4. $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 24 (●○○)
Calculer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25 (●●○)

1. Montrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + z = 2, \\ 2x + y - z = 3. \end{cases}$$

Exercice 26 (●●○)
Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et le cas échéant calculer leur inverse

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 27 (●○○)
Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer ${}^tMM$ et retrouver le résultat précédent.