TD$_{14}$ Suites réelles

1 Étude de la monotonie

Exercice 1 (●○○)
Étudier la monotonie des suites (u_n) définies par

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 - n - 4.$
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = e^n (2n)!.$
3. $u_0 = 1$, et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$
4. $u_0 = 3$, et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\sqrt{1+u_n^2}.$
5. $u_0 = 2$, et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \dfrac{1+2u_n}{1+3u_n}.$
6. $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
7. $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

2 Calcul de limite

Exercice 2 (●●○)
Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 1}{n^3 + 4}$ $\quad v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n^2 + n + 1}$ $\quad x_n = \ln(n+1) - \ln n$ $\quad y_n = \dfrac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}.$
2. $u_n = \exp\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ $\quad v_n = \dfrac{2^n}{n^2} + \cos(n!\, e^n)$ $\quad w_n = \sqrt{n}\left(1 + \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$ $\quad x_n = \sqrt[n]{n^2}$ $\quad y_n = \dfrac{n + \sin(2n)}{n - \ln(n^2)}$
3. $z_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin n + \ln n}.$
4. $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{\cos x_n}{\sqrt[3]{n+1}}$
5. $u_n = \dfrac{n + \ln n + 1}{n + e^n + e^{-n}}$, $u_n = 3^n - 2^{2n}$, $w_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}.$
6. $u_n = \dfrac{\sin(\frac{1}{n^2})}{(e^{\frac{3}{n}} - 1)\left(\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) - 1\right)}$, $u_n = n^2 \ln\left(1 + e^{-n}\right).$
7. $u_n = \dfrac{\ln(n^4+1)}{n^2+n+1}$, $u_n = n^3\, \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right).$

Exercice 3 (●○○)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Montrer que la suites $\dfrac{u_n}{n}$ converge vers 0.

Exercice 4 (●●●)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

1. En étudiant les fonctions $x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ et $x \mapsto x - \ln(1+x)$, montrer que pour tout réel $x > 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
2. En étudiant la quantité suite $(\ln(u_n))$ (après avoir rapidement montré qu'elle est bien définie), utiliser les inégalités précédentes pour obtenir un encadrement de $\ln(u_n)$.
3. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 5 (●●○)
Étudier les suites (définition, monotonie, convergence) dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.

Exercice 6 (●●● Vrai-faux)
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont vraies, le démontrer, sinon donner un contre-exemple.

1. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
2. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
3. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
4. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
5. Si (u_n) n'est pas majorée alors (u_n) tend vers $+\infty$.

3 Théorème de convergence monotone

Exercice 7 (●○○)
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n^2}{1 + 5\,u_n}$ pour tout entier n.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs. En déduire la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 8 (●○○)
Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 > 0$ et $v_{n+1} = v_n \dfrac{1 + 2v_n}{1 + 3\,v_n}$ pour tout entier n.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs. En déduire la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 9 (●●○)
Soit la suite u définie par : $u_0 > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n > 0$, en et déduire la monotonie de (u_n).
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 (●●○)
Soit la suite u définie par : $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.
Montrer que la suite est bien définie et qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 11 (●●● La somme harmonique)
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4.
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Que peut-on en déduire sur la nature convergente ou divergente de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}.$$
4. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

Exercice 12 (●●○)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + x^2$ et la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a > 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Démontrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

4 Utilisation des équivalents

Exercice 13 (●○○)
Quels sont les équivalents corrects parmi les suivants ?

1. $n \sim n+1$
2. $n^2 \sim n + n^2$
3. $\ln(n) \sim \ln(10^6 n)$
4. $e^n \sim e^{n+10^{-6}}$

Exercice 14 (●○○)
Donner un équivalent le plus simple possible des suites suivantes.

1. $\dfrac{n^3 - 2n + 5}{n^2 + 1}$,
2. $1 + 2 + \cdots + n$,
3. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$,
4. $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$,
5. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,
6. $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$.

5 Sous-suites

Exercice 15 (●○○)
En étudiant les suites extraites d'indices pairs et impairs, étudier la convergence de suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad v_n = \cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right).$$

6 Suites adjacentes

Exercice 16 (●●○)
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } v_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique. Exprimer $v_n - u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Déterminer leur limite commune, en considérant l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$.

Exercice 17 (●●● Moyenne arithmético-géométrique)
On considère deux nombres réels $a > 0$ et $b > 0$. On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$ et $v_0 = b$ ainsi que par les relations de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout x et $y > 0$, on a
$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$
2. En déduire que $\forall\, n \geq 1$, $u_n \geq v_n$.
3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante, et que (v_n) est croissante.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq u_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$ puis montrer que $(u_n v_n \to 0$.
5. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On appelle leur limite commune la moyenne arithmético-géométrique de a et de b.

Exercice 18 (●●●)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire la nature de la suite (u_n).