Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1A – Année 2023/2024
M. Marmorat

DS 5 – Mathématiques

Mercredi 24 Janvier 2024

Durée de l'épreuve : 3 heures 30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à *encadrer proprement* les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

Évitez les ratures (effacez ou barrez d'un simple trait d'éventuelles erreurs, utilisez un brouillon si possible).

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de trois exercices et d'un problème.

Exercice 1 (Questions de cours).

1. Soient E et F deux ensembles ainsi que $f : E \to F$ une fonction. Donner la définition ainsi que la caractérisation avec quantificateurs des assertions suivantes :

   (a) f est injective. (b) f est surjective. (c) f est bijective.

2. Résoudre le système suivant :

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & 2y & - & 3z & = 4 \\ x & + & 3y & - & z & = 11 \\ 2x & + & 5y & - & 5z & = 13 \\ x & + & 4y & + & z & = 18 \end{array}\right.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Énoncer la formule du binôme de Newton dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

   (b) On note
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Soit $p \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente l'expression de la matrice A^p.

Exercice 2. On considère la fonction f d'expression :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2\cos(x) - \sqrt{3}\right)^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. (a) Montrer que f est 2π-périodique.

   (b) Montrer que f est paire.

   (c) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$ pour connaître ses variations sur son domaine de définition. *(On expliquera comment tracer la courbe de f sur son ensemble de définition à partir de sa courbe sur $[0, \pi]$.)*
3. On souhaite étudier la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

(a) Justifier que f est dérivable sur $[0, \pi]$ et que

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f'(x) = -2 \frac{\sin(x)(2\cos(x) - \sqrt{3})}{\sqrt{\frac{1}{4} + (2\cos(x) - \sqrt{3})^2}}.$$

(b) En étudiant le signe de chacun des facteurs de la fraction ci-dessus, étudier le signe de f' sur l'intervalle $[0, \pi]$.

(c) Dresser le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.

4. Tracer l'allure graphique de la courbe de f sur $[-\pi, \pi]$.
5. Montrer que f est bijective de $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ dans un intervalle J à déterminer.

   On note $f^{-1} : J \to \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ la bijection réciproque de f.
6. Donner le tableau de variations de f^{-1} et une allure graphique de sa courbe représentative.
7. Pour tout $t \in J$, déterminer l'expression de $f^{-1}(t)$ en fonction de t.

Exercice 3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{T}_\lambda) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrl} (3-\lambda)\,x & - & y & - & z & = 0 \\ & & y & + & 2z & = 0 \\ -x & + & y & + & (3-\lambda)\,z & = 0 \end{array} \right.$$

Déterminer le rang de $(\mathcal{T}_\lambda)$ et résoudre $(\mathcal{T}_\lambda)$ en fonction du paramètre λ.

Problème.

On rappelle qu'il est possible d'utiliser le résultat d'une question même si on n'a pas réussi à traiter cette question.

Partie 1 :

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est pseudo-stochastique lorsque la somme de ses coefficients sur chaque ligne vaut 1. Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ est pseudo-stochastique car $2 + (-1) = (-3) + 4 = 1$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est pseudo-stochastique si et seulement s'il existe $t, s \in \mathbb{R}$ tels que $A = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ s & 1-s \end{pmatrix}$.
2. Soient A et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Utiliser la question précédente pour montrer que si A et B sont pseudo-stochastique alors leur produit AB est pseudo-stochastique.

On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est pseudo-stochastique si et seulement si $AU = U$.
4. En déduire une autre preuve de la question 2.

Partie 2 :

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est pseudo-bistochastique lorsque la somme de ses coefficients sur chaque ligne et sur chaque colonne vaut 1. Par exemple $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est pseudo-bistochastique car les sommes sur ses lignes comme ses colonnes valent $2 + (-1) = (-1) + 2 = 1$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est pseudo-bistochastique si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est pseudo-bistochastique si et seulement si $AU = {}^tAU = U$ (on rappelle que ${}^tA$ désigne la matrice transposée de la matrice A).
7. Montrer que si A et B sont pseudo-bistochastique alors leur produit AB aussi.

Partie 3 :

On note $\mathcal{M}_2^+$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^+$, mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \notin \mathcal{M}_2^+$.

8. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_2^+$ alors $AB \in \mathcal{M}_2^+$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est bistochastique lorsque A est pseudo-bistochastique et que tous ses coefficients sont positifs ou nuls (autrement dit, cette dernière condition s'exprime $A \in \mathcal{M}_2^+$) . On note B_2 l'ensemble des matrices bistochastiques.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in B_2$ si et seulement s'il existe $t \in [0,1]$ tel que $A = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$.
10. Montrer que si $A, B \in B_2$ alors $AB \in B_2$.

Partie 4 : (Bonus) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$B(t) = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

11. A l'aide des questions précédentes, montrer que

$$B_2 = \{B(t),\ t \in [0,1]\}.$$

On fixe un nombre $\alpha \in [0,1]$ et on s'intéresse aux puissances de la matrice $B(\alpha)$, c'est-à-dire aux matrices $B(\alpha)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

12. Démontrer, à l'aide des questions précédentes, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(\alpha)^n \in B_2$.
13. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $t_n \in [0,1]$ tel que $B(\alpha)^n = B(t_n)$.
14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = (2\alpha - 1)t_n + 1 - \alpha$.
15. Déterminer l'expression de t_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et de α.
16. Quelle est la limite de la suite (t_n) en $+\infty$? En déduire le comportement de la suite de matrices $(B(\alpha)^n)$ lorsque $n \to +\infty$.