TD$_{16}$ Limites et continuité des fonctions

1 Calcul de limites

Pour d'autres exercices, y compris de révision, sur le calcul de limites, vous pouvez vous entraîner sur les fiches du cahier de calcul disponibles sur cahier de prépa (dossier Remédiation).

Exercice 1 (●○○)
Déterminer les limites suivantes, si elles existent (on pourra éventuellement distinguer limite à gauche et limite à droite).

1. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ en 1 et $+\infty$,
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ en 1, en -1, en $+\infty$ et en $-\infty$,
3. $f(x) = \sqrt{x^2+3x-1} + (x+1)$ en $-\infty$,
4. $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{2x+\sin x}$ en 0 et $+\infty$,
5. $f(x) = \dfrac{1}{x}\lfloor x \rfloor$ en 0 et $+\infty$,
6. $f(x) = \dfrac{e^{2x}-e^x+x}{e^x-x}$ en $+\infty$ et $-\infty$,
7. $f(x) = \dfrac{\ln(x)+x-1}{x+e^x}$ en $+\infty$ et 0,
8. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+2x-3)}{\ln(x+1)}$ en $+\infty$.

Exercice 2 (●○○)
Déterminer (si elle existe) la limite en 0 de la fonction : $x \longmapsto \dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

Exercice 3 (●○○)
Déterminer (si elle existe) la limite en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto 2x + \sin(x^2)$.

Exercice 4 (●●○)
Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = n\left(e^{2/n}-1\right)$.

Exercice 5 (●●○)
Calculer la limite de $\dfrac{\ln(x-2)}{x-3}$ en 3 et en $+\infty$.

Exercice 6 (●●○)
1. Déterminer la limite de $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ et de $\dfrac{x^3-1}{x-1}$ en 1.
2. Déterminer la limite de $\dfrac{x^3+1}{x+1}$ et de $\dfrac{x^5+1}{x+1}$ en -1.

Exercice 7 (●●○)
Déterminer la limite de la fonction suivante en 1 et en $+\infty$:

$$f : x \longmapsto \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^2+2x-3}$$

.

Exercice 8 (●●○)
1. Calculer la limite de : $\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer la limite de : $\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 9 (●○○)
Montrer que $x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0+.

Exercice 10 (●●○)

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \longmapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0.
2. En déduire les limites : $x \longmapsto x^{\frac{1}{x-1}}$ en 1 et $x \longmapsto (1+e^{-x})^{e^x}$ en $+\infty$.

2 Continuité des fonctions

Exercice 11 (●○○)
Montrer que les fonctions suivantes sont continues en x_0 :

1. pour $x_0 = 2$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2+2x-6 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \sqrt{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$
2. pour $x_0 = 1$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2+1 & \text{si } x < 1 \\ f(1) = 2 & \\ f(x) = \frac{2\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 12 (●●○)
On considère la fonction f : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x-1} \end{array}$.

Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 13 (●●○)
Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définition.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|x|+1}$
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
3. La fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \forall x \in [-1;0[\cup]0;+\infty[, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Exercice 14 (●●○)
Soit f le polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^8 + x^2 + 2x - 1$.

1. Montrer que f possède au moins deux racines réelles.
2. Montrer qu'il existe une unique racine α qui vérifie $0 < \alpha < 1$.
3. Déterminer une valeur approchée de α à l'aide votre calculatrice ou d'un ordinateur.

Exercice 15 (●●○)
Dans les cas suivants, déterminer si la fonction f est prolongeable par continuité en a.

1. pour $a = -1$ et f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x+1}$,

2. pour $a = 2$ et f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{(x-2)^2}$,
3. pour $a = 1$ et f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x-1) - \ln(x-1)$.
4. pour $a = 2$ et f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2} & \text{si } x > 2 \\ f(x) = x^2 - x - 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Exercice 16 (●○○)
Soit f la fonction définie sur $]\,0;1[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{1-x}$

Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $[\,0;1]$.

Exercice 17 (●○○)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

3 Utilisation des théorèmes de continuité

Exercice 18 (●●○)
Montrer qu'une fonction continue et ne s'annulant pas sur son intervalle de définition est de signe constant.

Exercice 19 (●●○)
Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0, 2[$ dans un intervalle que l'on déterminera.
2. Montrer que pour tout entier $n > 2$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $]0, 2[$, (notée u_n).
3. Déterminer le sens de variation de (u_n) et étudier sa limite.

Exercice 20 (●○○)
Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{x}$.

Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{10}$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 21 (●○○)
On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,\right[$ dans un intervalle J à déterminer.
2. Établir le tableau de variations de f^{-1} sur J.

Exercice 22 (●○○)
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. Montrez que f réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ dans un intervalle que vous déterminerez.

Exercice 23 (●○○)
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ telle que $f : x \longmapsto x - \ln(x)$.

Montrer que l'équation $f(x) = 3$ a exactement deux solutions sur $]0; +\infty[$.

Exercice 24 (●●○)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^x$.

1. Montrer que tout nombre réel $t < -1$ possède exactement deux antécédents par f sur $\mathbb{R}$.
2. On note pour $t < -1$ ses antécédents par f, $u(t)$ et $v(t)$ tel que $u(t) < v(t)$.
3. ($\star$) Construire à la calculatrice ou avec l'outil informatique la courbe représentative des fonctions $t \longmapsto u(t)$ et $t \longmapsto v(t)$

Exercice 25 (●●○)
Soit f une fonction continue de $[0;1]$ sur $[0;1]$, (f *est définie sur* $[0,1]$ *et elle prend ses valeurs dans* $[0,1]$).

Montrer que f admet (au moins) un point fixe. (*ie.* un $c \in [0;1]$, tel que $f(c) = c$)

Exercice 26 (●●●)
Une personne parcourt 20 km en 1 heure, montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant laquelle cette personne parcours exactement 10 km.

Exercice 27 (●●●)
Montrer qu'à chaque instant, il existe deux points de la Terre diamétralement opposés possédant la même température.

4 Suites implicites

Exercice 28 (●●●)
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Démontrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}$, $f(c) = c$
2. Justifier que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^x + x = n$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée x_n.
3. Déterminer à l'aide de votre calculatrice ou d'un ordinateur l'allure de x_n en fonction de n.
4. Quelle la monotonie de la suite (x_n) ?
5. Démontrer que : $\forall\, n > 3, \quad \ln\left(n - \ln(n)\right) < x_n < \ln(n)$.
6. En déduire la limite de la suite (x_n) et un équivalent simple de (x_n).

Exercice 29 (●●●)
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation : $\ln(x) = x^{-n}$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Déterminer à l'aide d'un ordinateur l'allure de x_n en fonction de n.
3. Montrer que x_n est minorée par 1.
4. Déterminer la monotonie de (x_n). En déduire que (x_n) est convergente.
5. Montrer que (x_n) converge vers 1. (*On pourra raisonner par l'absurde*)

Exercice 30 (●●○)
1. Déterminer la limite de $\frac{e^{\left(x^2\right)}}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{e^{(x^2)}-1}{x}$.
   (a) Montrer que f peut être prolongée par une fonction continue sur $\mathbb{R}$. (On notera toujours f ce prolongement)
   (b) ($*$) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que tout réel λ possède un unique antécédent par f.

Exercice 31 (●●○)

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par : $\quad f_n(t) = e^{nt} + t + t^3$

1. (a) Étudier les variations de la fonction f_n.

   (b) Montrer que l'équation $f_n(t) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera t_n.

   (c) Quel est le signe de t_n ?

2. (a) Pour tout entier n, déterminer le signe de $f_{n+1}(t_n)$

   (b) En déduire le sens de variation de la suite (t_n).

   (c) Montrer que cette suite converge.

   On note : $l = \lim_{n\to+\infty} t_n$.

3. (a) Montrer que si $l < 0$ alors la suite $(f_n(t_n))$ a une limite non nulle.

   (b) Quelle est la valeur de l ?

   (c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} n\,t_n$.