Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1A – Année 2023/2024
M. Marmorat

DS 6 – Mathématiques

Mercredi 6 Mars 2024

Durée de l'épreuve : 3 heures 30 minutes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à *encadrer proprement* les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

Évitez les ratures (effacez ou barrez d'un simple trait d'éventuelles erreurs, utilisez un brouillon si possible).

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de deux exercices, d'un problème et d'un exercice bonus.

Exercice 1. 1. Déterminer les limites des suites suivantes : $u_n = \dfrac{n^2\sin(n)}{n^3+1}$ et $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$S_1 = \sum_{1\leq i,j\leq n} j \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} j.$$

Exercice 2. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2}, \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{2+x}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.
5. (a) Étudier la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{2+x} - x$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.
   (c) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (b) Calculer sa limite.

Problème. Considérons la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce problème, on se propose, de plusieurs manières différentes et indépendantes, de calculer les puissances de la matrice A et d'étudier son inversibilité. Toutes les parties sont indépendantes.

Partie I : Rang

1. Calculer le rang de la matrice A.
2. La matrice A est-elle inversible ?

Partie II : Binôme de Newton

Posons $B = A - I_3$.

3. Calculer B^2.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer la matrice B^k en fonction de B et de k.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n.

Partie III : Diagonalisation

6. En utilisant le rang, déterminer l'ensemble des réels λ tels que la matrice $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.

Posons

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
8. (a) Calculer la matrice $D = PAP^{-1}$. Quelle propriété possède D ? Quel lien peut-on faire avec la question précédente ?
   (b) Montrer que $A = P^{-1}DP$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}D^nP$.
   (c) Calculer D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (d) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
9. Justifier que la matrice D est inversible et donner son inverse.
10. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

Partie IV : Polynôme annulateur

11. Montrer que $A^2 - 4A + 3I_3 = 0_3$.
12. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
13. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A^n = x_nA + y_nI_3$$

   et que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+2} = 4y_{n+1} - 3y_n. \end{cases}$$

   (b) Expliciter le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire les puissances de la matrice A et retrouver le résultat des parties précédentes.

Exercice 3 (Bonus). Pour $n \geq 1$, on pose

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
2. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
3. En déduire que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $x \leq -\ln(1-x)$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_n \leq \ln(2) \leq b_n$. Que peut-on en déduire ?

$\mathscr{F} \mathscr{I} \mathscr{N}$