Chapitre 17

Dénombrement

Sommaire

Le *dénombrement* est le domaine des mathématiques dont l'objectif est de compter le nombre d'éléments de certains ensembles finis.

17.1 Ensembles finis

17.1.1 Cardinal d'un ensemble fini

On dit qu'un ensemble E est *fini* s'il a un nombre fini d'éléments. Plus formellement :

Définition 17.1: Ensemble fini, cardianl d'un ensemble

Un ensemble E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $f : E \to [\![1, n]\!]$.
Dans ce cas, l'entier n est unique et on l'appelle *cardinal* de E ; c'est simplement le nombre d'éléments de E. Le cardinal de E se note $|E|$ ou card(E). On utilisera surtout la première notation.

Remarque 17.1.

- Le cardinal d'un ensemble fini est simplement le nombre d'éléments dans cet ensemble.
- En pratique donner une bijection entre un ensemble E et $[\![1, n]\!]$ consiste à attribuer successivement un numéro à chaque élément de E. De manière plus prosaïque cela revient à compter les éléments de E.

Exemple 17.1.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est fini de cardinal n.
2. La BCPST1 $2023 - 2024$ est un ensemble fini de cardinal 35. La liste d'appel peut, par exemple, fournir une bijection entre la classe et l'ensemble $[\![1, 35]\!]$.
3. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont tous infinis.

Remarque 17.2. Deux ensembles finis E et F ont même cardinal s'il existe une bijection $f : E \to F$. Pour compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini E, on peut chercher à construire une bijection de E vers un autre ensemble de cardinal connu.

En général, on adopte une approche beaucoup moins formelle pour ces questions.

Entre ensembles finis de même cardinal, les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité sont en fait équivalentes.

Théorème 17.1 (fonction bijective entre deux ensembles de même cardinal)
Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles finis de même cardinal. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) f est bijective ;

ii) f est injective ;

iii) f est surjective.

Exemple 17.2. Admettons que l'on souhaite ranger n paires de chaussettes dans n tiroirs.

Imposer que chaque tiroir contient au plus une paire de chaussette équivaut à imposer que chaque tiroir contient exactement une paire de chaussette, ce qui équivaut également à imposer que chaque tiroir contient au plus une paire de chaussette.

17.1.2 Cardinaux élémentaires

On peut compter le nombre d'éléments d'un ensemble en écrivant cet ensemble comme une union disjointe de sous-ensembles et en comptant le nombre d'éléments de chacun de ces sous-ensembles.

Propriété 17.1: Cardinal d'une union disjointe

Soit E un ensemble fini. Soient A et B deux parties *disjointes* de E (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$). Alors, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Par une récurrence immédiate, on peut généraliser à une décomposition en union disjointe de k parties.

Propriété 17.2. *Si $E = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ est un ensemble fini et que les A_i sont deux à deux disjoints, alors*

$$|E| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Exemple 17.3. Si dans trois classes d'un lycée, il y a 45, 47 et 48 élèves, il y a au total $45+47+48 = 130$ élèves dans ces trois classes.

Remarque 17.3. Quand l'union $A \cup B$ n'est pas disjointe, la formule ne fonctionne pas puisqu'on va compter deux fois l'intersection de A et B.

Si A est une partie de E, on rappelle qu'on note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E.

Propriété 17.3: Cardinal du complémentaire. Principe de soustraction.

Soit A une partie d'un ensemble fini E. Alors, le complémentaire $\bar{A}$ de A dans E vérifie :

$$|\bar{A}| = |E| - |A|.$$

Bien sûr, cette propriété peut être utilisée dans les deux sens. Parfois, il est en effet plus simple de compter les éléments qui ne sont pas dans un ensemble, plutôt que ceux qui y sont.

Démonstration. L'union

$$A \cup \overline{A} = E$$

est disjointe.

Donc d'après le principe d'addition,

$$|A| + |\overline{A}| = |E|,$$

autrement dit $|\overline{A}| = |E| - |A|$. $\square$

Exemple 17.4. Dans un jeu de 52 cartes, il y a 39 cartes qui ne sont pas des piques, puisque $52-13=39$ et qu'il y a 13 piques.

Propriété 17.4: Cardinal d'une union (cas général). Principe d'addition.

Si E est un ensemble, A et B deux sous ensembles finis de E, alors on a

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Démonstration. On se ramène à une union disjointe. E est l'union disjointe de $A \setminus (A \cap B)$, $B \setminus (A \cap B)$ et $A \cap B$. (*faire un dessin*)

Donc

$$|E| = |A \setminus (A \cap B)| + |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B|.$$

Le cardinal du complémentaire, $|A - (A \cap B)| = |A| - |A \cap B|$ et $|B - (A \cap B)| = |B| - |A \cap B|$; on peut alors conclure. □

Exemple 17.5. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes standard. Combien de possibilités y-a-t-il de tirer une figure ou un cœur ?

On sait qu'il y a 12 figures, 8 cœur et 3 figures à cœur. Il y a donc $12 + 8 - 3 = 17$ cartes qui sont soit une figure, soit un cœur.

La généralisation à une union de n parties est compliquée à écrire. A titre d'exercice, on pourra démontrer le cas $n = 3$:

Exemple 17.6. Si A, B et C sont trois parties d'un ensemble E, montrer que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \Big(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\Big) + |A \cap B \cap C|.$$

Exercice 17.1. Compter le nombre d'entiers $n \in [\![1, 100]\!]$ divisibles par 2 ou 3.

On note A_2 et A_3 l'ensemble des entiers de 1 à 100 respectivement multiples de 2 et 3. On cherche le cardinal de $A_2 \cup A_3$. Or $A_2 \cap A_3$ est l'ensemble des entiers multiples de 6 (un nombre est divisible par 6 ssi il est divisible par 2 et par 3).

De façon générale, si d et n sont des entiers, il y a $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ multiples de d entre 1 et n. On a donc :

$$\begin{aligned}|A_2| &= 50\\ |A_3| &= 33\\ |A_2 \cap A_3| &= 16.\end{aligned}$$

Ainsi, $|A_2 \cup A_3| = 50 + 33 - 16 = 67$.

Propriété 17.5: Cardinal d'un produit cartésien. Principe de multiplication.

Soient E et F deux ensembles finis.
Alors $E \times F$ est fini de cardinal $|E| \times |F|$.

On peut bien sûr généraliser à un produit de k ensembles finis. En particulier :

Propriété 17.6. *Si E est un ensemble et k un entier, alors E^k est fini et*

$$|E^k| = |E|^k.$$

Exemple 17.7. — Quel est le cardinal de $[\![1, 4]\!] \times [\![0, 5]\!]$?

— Un cadenas à code possède 3 mollettes, chacune possédant 10 positions différentes pouvant aller de 0 à 9. Combien de codes sont possibles ?

Si on peut répartir n objets dans k ensembles et que chaque ensemble a le même nombre d'éléments d, alors $d = \dfrac{n}{k}$ (ou de façon équivalente $k = \dfrac{n}{d}$). Dans le folklore mathématique, on l'appelle aussi *lemme des bergers* : pour compter le nombre de moutons, on compte le nombre de pattes et on divise par 4. Plus formellement :

Propriété 17.7 (Lemme des bergers. Principe de division.)**.** *Soient E et F des ensembles finis, soit r un entier. Soit $f : E \to F$ une application surjective telle que tout élément y de F a exactement r antécédents par f.*

Alors $|F| = \dfrac{|E|}{|r|}$.

Exemple 17.8. Un chien de berger voit son troupeau de moutons sortir de l'étable. Il compte les pattes passant devant lui, 4 par 4 ($d = 4$). Une fois le troupeau sorti, il a dénombré $n = 256$ pattes. Il y a donc en tout $k = 64$ moutons dans le troupeau.

17.2 Problèmes classiques de dénombrement

17.2.1 Listes avec répétition

Définition 17.2: p-liste, p-uplet

Une p-*liste* ou p-*uplet* est un élément d'un produit cartésien de p ensembles.
Quand chacun des p ensembles égal à un même ensemble E, on parle de p-liste d'éléments de E ou de p-uplet d'éléments de E.

Exemple 17.9. Par exemple

Remarque 17.4. Une p-liste d'éléments de E est donc un élément de E^p. On peut donc l'écrire $(x_1, \dots, x_p)$ où chaque x_i est dans E. On prendra bien garde au fait que l'ordre des x_i est fondamental dans cette écriture.

Théorème 17.2: Nombre de listes à p éléments

Soient $E_1, \dots, E_p$ des ensembles finis. L'ensemble des p-listes $(x_1, \dots, x_p)$ tels que chaque x_i est dans E_i a pour cardinal
$$\prod_{i=1}^{p} |E_i|.$$

Démonstration. En effet, cet ensemble est simplement $E_1 \times \cdots \times E_p$. □

On rencontre souvent cette notion de liste dans les problèmes de dénombrement faisant intervenir des mots sur un alphabet.

Remarque 17.5. En pratique, on rencontre surtout des cas où on considère une n-liste d'éléments de E. Il y a donc $|E|^n$ telles listes.

Exemple 17.10. Par exemple, si on tire n fois une pièce et qu'on note si elle tombe sur Pile ou Face, on a 2^nlistes de résultats possibles.

Exemple 17.11. On compose un numéro de téléphone au hasard. Combien de numéros de téléphone existe-t-il ? Combien de numéros de téléphone se terminant par 26 ?

Exemple 17.12. Combien de mots de 7 lettres commençant par 2 consonnes et finissant par 1 voyelle peut-on écrire ? On considère qu'il y a 20 consonnes et 6 voyelles.

Si C est l'ensemble des consonnes, V celui des voyelles et $L = C \cup V$ celui des lettres, un mot satisfaisant les critères est un élément de $C^2 \times L^4 \times V$. Il y a donc $20^2 \times 26^4 \times 6$ tels mots.

17.2.2 Listes sans répétition et permutations

Définition 17.3: Liste sans répétition, arrangement

Soit E un ensemble et p un entier naturel non nul. Une *p-liste sans répétition* ou *p-arrangement* de E est une p-liste de E d'éléments deux à deux distincts.

Exemple 17.13. Si $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, alors $(0, 1, 4)$ est une 3-liste sans répétition de E, ou encore un 3-arrangement. $(2, 1, 2)$ n'est pas un 3-arrangement car il y a répétition.

Théorème 17.3: Nombre d'arrangements

Si E est de cardinal n, le nombre de p-arrangements de E est

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

(*on considère que ce produit vaut* 0 *si* $p > n$.)

Remarque 17.6. Notons qu'il y a p facteurs dans ce produit. On peut l'écrire $\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$.

Démonstration. On a n choix pour le premier élément de la liste, puis $n-1$ pour le deuxième (pour éviter le premier), puis $n-2$ pour le troisième (pour éviter les deux premiers)... jusqu'à $n-p+1$ pour p-ème et dernier. □

Exemple 17.14.

1. Combien de nombres entre 000 et 999 ont tous leurs chiffres différents ?
   À un nombre entre 000 et 999 on peut associer la liste de ses chiffres. Il nous faut donc compter les 3-listes sans répétition dans un ensemble à 10 éléments. Il y en a $\frac{10!}{7!} = 720$
2. Un nouveau président doit composer un gouvernement de 10 ministres qu'il choisit parmi 40 politiciens. Combien de gouvernements différents sont possibles ?
   Un ministère ne peut avoir qu'un ministre et un ministre ne peut recevoir qu'un ministère. Le président doit donc faire 10 choix deux-deux distincts dans un ensemble à 40 éléments, il y a donc $\frac{40!}{30!} =$ gouvernements possibles. $\frac{40!}{30!}$ vaut approximativement 3×10^{15}.

Propriété 17.8 (Cas particulier)**.** *Si E est un ensemble de cardinal n, il y a $n!$ n-listes sans répétition d'éléments de E.*

Remarque 17.7. On parle aussi de *permutation* pour désigner une n-liste sans répétition d'éléments de E (avec $|E| = n$).

Exemple 17.15. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot « maths » ?
Le mot « maths »est constitué de 5 lettres distinctes, un anagramme correspond à une permutation de ces lettres. Il y a donc $5! = 120$ anagrammes du mot « maths »

17.2.3 Combinaisons

Définition 17.4: Combinaison

Une p-*combinaison* d'élements de E est une partie (un sous-ensemble) de E de cardinal p.

Théorème 17.4: Nombre de combinaisons

Si E est de cardinal n, il y a $\dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$ p-combinaisons d'éléments de E. (0 si $p > n$)

Démonstration. Notons $\mathcal{A}_E^p$ l'ensemble des p-listes sans répétition d'éléments de E. Notons $\mathcal{C}_E^p$ l'ensemble des p-combinaisons d'éléments de E (c'est-à-dire l'ensemble des parties de E à p éléments). On définit $f : \mathcal{A}_E^p \to \mathcal{C}_E^p, (x_1, \dots, x_p) \mapsto \{x_1, \dots, x_p\}$.

Notons que f est bien définie. En effet, si $(x_1, \dots, x_p)$ est un p-arrangement de E, les x_i sont deux à deux distincts, de sorte que l'ensemble $\{x_1, \dots, x_p\}$ a bien p éléments.

Si $F \in \mathcal{C}_E^p$, les antécédents de F par f sont exactement les p-arrangements d'éléments de F. Comme F a p éléments, il y en a $p!$.

Par le lemme des bergers, on a donc : $|\mathcal{C}_E^p| = p! \times |\mathcal{A}_E^p|$, ce qui prouve le résultat. □

Définition 17.5: Coefficient binomial

On utilise la notation
$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$
et on appelle ce nombre un *coefficient binomial*. C'est le nombre de p-combinaisons dans un ensemble à n éléments.

Remarque 17.8. Remarquons que la formule $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ n'est valide que si $p \leq n$.

Remarque 17.9. $\binom{n}{p}$ désigne donc le nombre de façons de construire un ensemble à p éléments à partir d'un ensemble à n éléments.

Exemple 17.16. Une chaîne de restauration rapide propose de choisir 3 légumes parmi une sélection de 8, à mettre dans un sandwich. On a $\binom{8}{3} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$ choix possibles.

Remarque 17.10 (Bilan). Dans de nombreux problèmes de dénombrement (et plus tard de probabilités), on tire un nombre k d'objets parmi n objets. Le nombre de résultats possibles dépendra de la façon dont se déroule ce tirage :

— Si les tirages sont **successifs et avec remise** (les objets sont remis après qu'on les a tirés), on considère une k-liste dans un ensemble à n éléments ; il y en a n^k.

— Si les tirages sont **successifs et sans remise**, on considère une k-liste sans répétition dans un ensemble à n éléments ; il y a en a $n(n-1)\dots(n-k+1)$.

— Si les k tirages sont **simultanés**, on considère une k-combinaison dans un ensemble à n éléments ; il y en a $\binom{n}{k}$.

Notons que dans les deux derniers cas, on doit avoir $k \leq n$.

17.2.4 Nombre de parties d'un ensemble

Théorème 17.5: Nombre de sous-ensembles d'un ensemble

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal 2^n. Autrement dit, il y a 2^n sous-ensembles différents de E.

Démonstration. Pour déterminer une partie de E, on considère tous les éléments de E et on dit pour chacun s'ils sont ou pas dans E. Il y a 2 choix possibles pour chacun des n éléments (oui et non) donc 2^n parties possibles. □

17.2.5 Relations classiques sur les coefficients binomiaux

On a déjà donné des relations sur les coefficients binomiaux. On démontre maintenant ces relations par des méthodes de dénombrement.

On note E un ensemble de cardinal n.

Symétrie. Si $0 \leq k \leq n$, on a $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

En effet, le passage au complémentaire définit une bijection de l'ensemble des parties à k éléments de E vers l'ensemble des parties à $n-k$ éléments de E. Ces deux ensembles ont donc même cardinal.

Relation de Pascal. Si $1 \leq k \leq n$, on a $\displaystyle\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Choisissons a un élément quelconque de E. L'ensemble des parties à k éléments de E est l'union disjointe de deux ensembles :

— L'ensemble $\mathcal{P}_1$ des parties à k éléments de E qui contiennent a.

— L'ensemble $\mathcal{P}_2$ des parties à k éléments de E qui ne contiennent pas a.

Une partie dans $\mathcal{P}_1$ s'obtient en choisissant $k-1$ éléments parmi les $n-1$ différents de a, donc $|\mathcal{P}_1| = \binom{n-1}{k-1}$.

Une partie dans $\mathcal{P}_2$ s'obtient en choisissant k éléments parmi les $n-1$ différents de a, donc $|\mathcal{P}_2| = \binom{n-1}{k}$.

On conclut par la formule qui donne le cardinal d'une union disjointe.

Formule du chef. Si $1 \leq k \leq n$, on a $\displaystyle k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Considérons un ensemble E de n personnes. On souhaite constituer une équipe constituée de k personnes parmi ces n et désigner un capitaine (ou chef) pour cette équipe. Il y a deux façons de procéder :

— On choisit l'équipe ($\binom{n}{k}$ choix) puis le chef parmi les k de l'équipe (k choix). D'où $\binom{n}{k} \times k$ possibilités.

— On choisit le chef parmi les n personnes (n choix) et celui-ci désigne le reste de son équipe : $k-1$ personnes parmi les $n-1$ restantes, donc $\binom{n-1}{k-1}$ choix. D'où $n\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

Formule du binôme de Newton. Si a, b sont deux nombres complexes, alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On peut le prouver par récurrence en utilisant la relation de Pascal (voir le chapitre 7).

Une justification plus visuelle consiste à dire que le produit $(a+b)^n$ peut se développer et qu'il va s'écrire comme une somme de termes de la formes $a^k b^l$, où a a été choisi dans k facteurs et b a été choisi dans l facteurs (en particulier, $l = n-k$). Ainsi le terme $a^k b^{n-k}$ apparaît $\binom{n}{k}$ (une fois pour chaque choix de k facteurs parmi les n).

Généralisation de la formule du chef (hors programme) On considère des entiers k, p et n tels qu'on ait $0 \leq k \leq p \leq n$. Alors

$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$

Cette formule peut s'obtenir par le calcul en utilisant des factorielles.

Une preuve combinatoire consiste à énumérer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \subset B \subset E$, avec $|A| = k$ et $|B| = p$.

— Soit on commence par choisir la partie A ($\binom{n}{k}$ choix). Étant fixée une partie A, il faut lui ajouter $p-k$ éléments parmi les $n-k$ qui ne sont pas dans A, pour obtenir une partie B de cardinal p telle que $A \subset B$: d'où $\binom{n-k}{p-k}$ choix. On trouve ainsi le terme de droite.

— Soit on commence par choisir la partie B ($\binom{n}{p}$ choix). Étant fixée une partie B, on a alors $\binom{p}{k}$ choix pour la partie A (puisqu'on veut $A \subset B$). On trouve ainsi le terme de gauche.

Pour $k = 1$, on retrouve la formule du chef

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

La preuve combinatoire est la même : on remplace simplement le chef, par une équipe de direction composée de k individus (parmi les p individus composant la partie B).

Formule de Vandermonde (hors programme). On considère trois entiers n_1, n_2 et n tels que $n_1 + n_2 = n$. Considérons k tel que $0 \leq k \leq n$. Alors

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i} = \binom{n}{k}.$$

Écrivons E comme une union disjointe $E = E_1 \bigcup E_2$, où E_i est de cardinal n_i. Notons $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments dans E. Si $i \in [\![0, k]\!]$, notons $\mathcal{P}_{k,i}(E, E_1)$ l'ensemble des parties à k éléments dans E, dont l'intersection avec E_1 a exactement i éléments.

On a une union disjointe $\mathcal{P}_k(E) = \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{P}_{k,i}(E, E_1)$. De plus, le cardinal de $\mathcal{P}_{k,i}(E, E_1)$ a cardinal $\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}$ (pour constituer la partie à k éléments de E, il faut choisir i éléments dans E_1 et donc $k-i$ dans E_2). On conclut par le principe d'addition.

Remarque 17.11. En prenant $n_1 = 1$, on retrouve la relation de Pascal. D'ailleurs, la preuve ci-dessus est une généralisation de la preuve donnée pour la relation de Pascal.