

TD₁₇ Dénombrement

Exercice 1

1. Dans un centre de vacances accueillant cent vingt personnes, on sait que vingt-quatre personnes font du tennis et quinze du canoë. Six personnes pratiquent à la fois tennis et canoë. Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports ?
2. Dans une classe de 26 élèves, 22 étudient l'anglais, 16 l'allemand et 10 l'espagnol. On sait en outre que 12 étudient à la fois l'anglais et l'allemand, que 4 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol et 8 à la fois l'anglais et l'espagnol. Combien d'élèves étudient les trois langues ?

Exercice 2

Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On effectue n tirages d'une boule avec remise.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages où la boule noire est sortie au moins une fois ?

Exercice 3

Donner la partie du cours se rapportant à chacune des situations suivantes (p -liste, p -arrangement, permutation, p -combinaison, ensemble des parties) en précisant la valeur de p et les ensembles concernés, puis dénombrer l'ensemble demandé.

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. (a) Un codon est formé de 3 nucléotides parmi A, T, C et G. Combien existe-t-il de codons différents ? (b) Combien existe-t-il de listes Python de longueur 10 ne contenant que les éléments 1, 2 ou 3 ? (c) On dispose de 4 jetons numérotés de 1 à 4 et d'un plateau comportant 16 cases. Si chaque case doit contenir au plus un jeton, combien y a-t-il de façons de placer les 4 jetons sur le plateau ? (d) Dix hommes et dix femmes vont à un bal. Combien de façons y a-t-il de former 10 couples homme/femme pour la prochaine danse ? (e) Une urne contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire successivement et sans remise 10 jetons dans l'urne. Combien de tirages différents sont possibles ? (f) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot BCPST ? Combien y a-t-il pour le mot BIOCHIMIE ? (on ne demande pas que les anagrammes formées aient un sens en Français). | <p>Combien de mains différentes peut-on obtenir ?</p> <ol style="list-style-type: none"> (b) Un cinéma projète 10 films en boucle dans 10 salles différentes. Il propose une soirée à la carte où les spectateurs choisissent 4 films à aller voir dans l'ordre de leur choix. Combien de soirées différentes sont possibles ? (c) On divise une classe de 36 élèves en deux groupes de 18 élèves. Combien y a-t-il de résultats possibles ? (d) On divise une classe de 36 élèves en deux groupes de 18 élèves, le groupe a et le groupe b. Combien y a-t-il de résultats possibles ? (e) Sur un plateau à 9 cases, on choisit de mettre ou non un pion sur chacune des cases. Combien y a-t-il de résultats possibles ? (f) 36 élèves se placent dans une salle de 44 places. Combien de façons différentes ont-ils de s'asseoir ? (g) Un camion de glaces propose 15 parfums différents. Combien de glaces "3 boules" peut-on composer ? |
| <ol style="list-style-type: none"> 2. (a) On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. | |

Exercice 4

Combien y a-t-il de brins d'ADN différents de 12 nucléotides de long formés par 3 adénines (A), 3 thymines (T), 3 cytosines (C) et 3 guanines (G) ?

Exercice 5

On distribue une main constituée de 13 cartes issues d'un paquet classique de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains possibles contenant la dame de coeur ?
3. Combien y a-t-il de mains possibles contenant exactement un as ?
4. Combien y a-t-il de mains ne contenant aucun pique ?
5. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un roi ?
6. Combien y a-t-il de mains contenant au plus un coeur ?
7. Les 52 cartes du paquet sont en fait distribuées à 4 joueurs différents (et discernables), chacun en recevant 13. Combien y a-t-il de donnes possibles, c'est-à-dire de distributions des 4 mains ?

Exercice 6

On s'intéresse aux anagrammes du mot ANANAS.

1. Combien y en a-t-il en tout ? (réponse : 60)
2. Combien y en a-t-il qui commencent par A ? (réponse : 30)
3. Combien y en a-t-il qui ne se terminent pas par N ? (réponse : 40)
4. Combien y en a-t-il qui contiennent à la suite les lettres S et A (dans cet ordre) ? (réponse : 30)
5. Combien y en a-t-il où les deux N ne se suivent pas ? (réponse : 40)

Exercice 7

Soit E un ensemble à n éléments, k et p deux entiers tels que $k \leq p \leq n$.

1. Déterminer de deux façons différentes le nombre de couples (A, B) tels que A et B sont deux sous ensembles de E à k et à p éléments et $|A| = k$, $|B| = p$. En déduire que

$$\binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$

C'est la formule du chef généralisée.

2. Redémontrer cette formule par le calcul.
3. Retrouver la formule du chef en prenant $k = 1$.
4. Donner une interprétation combinatoire de cette formule similaire à l'interprétation de la formule du chef vue en cours.

Exercice 8

Dans un jeu de loto à N numéros, une grille est constituée de k numéros.

1. Combien y a-t-il de grilles possibles en tout ? Aujourd'hui les numéros gagnants sont x_1, x_2, \dots, x_k . Les valeurs x_1, x_2, \dots, x_k sont donc fixées dans toutes les questions qui suivent. Combien y a-t-il de grilles différentes avec...
 2. ...aucun bon numéro ?
 3. ...exactement 1 bon numéro ?
 4. ...exactement 2 bons numéros ?
 5. ...exactement p bons numéros ?
 6. ...au moins 1 bon numéro ? Donner deux façons de dénombrer cette dernière situation, et en déduire une égalité faisant intervenir des coefficients binomiaux.