Chapitre 18

Probabilités 1 : les concepts de base

Sommaire

L'objectif du calcul des probabilités est de formaliser les notions de hasard et d'expérience aléatoire.

La théorie des probabilités a été axiomatisée en 1933 par le mathématicien Andreï Kolmogorov. Son importance a crû de façon spectaculaire depuis et il existe de nombreuses interactions entre les probabilités et les autres domaines des mathématiques (théorie des nombres ou analyse par exemple).

En première année, on se limite aux probabilités sur un univers fini. En deuxième année, on considère aussi le cas d'un univers dénombrable ou continu (densités de probabilité...).

18.1 Espaces probabilisés

18.1.1 Univers probabilisé

Définition 18.1: Univers, événement, issue

- Un *univers fini* Ω est un ensemble fini.
- Un *événement* A est une partie de Ω.
- Une *issue* (ou *réalisation*) est un élément de Ω.

Exemple 18.1.

- On tire une carte dans un paquet de 32 cartes ordinaires. On modélise l'univers Ω comme l'ensemble des cartes

$$\Omega = \{(\text{As, Pique}), (\text{Roi, Pique}), \dots, (2, \text{Trefle})\}.$$

Tirer le 7 de carreau est une issue de l'expérience, c'est un élément de l'ensemble Ω : $(7, \text{Pique})$. L'événement : *« Tirer un pique »* se traduit par l'événement

$$A = \{(\text{As, Pique}), (\text{Roi, Pique}), \dots, (2, \text{Pique})\} \subset \Omega.$$

- On lance deux dés (discernables) à 6 faces et on modélise le résultat obtenu comme un couple dans $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.
  Obtenir 3 avec le premier dé et 5 avec le deuxième correspond à l'issue $(3, 5)$.
  L'événement : *« On obtient deux nombres pairs »* se traduit par l'événement
  $$A = \{2, 4, 6\}^2.$$
  L'événement : *« On obtient au moins un 6 »* se traduit par l'événement
  $$B = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}.$$

Définition 18.2: Événement certain, événement impossible

- L'*événement certain* est la partie Ω.
- L'*événement impossible* est la partie $\emptyset$.
- Si A est un événement, l'*événement contraire* de A est le complémentaire de A dans Ω, qu'on note $\bar{A}$.

Exemple 18.2. On tire un dé à 6 faces.

- L'événement *« On obtient un numéro entre 1 et 6 »* est certain, c'est l'univers Ω.
- L'événement *« On obtient 0 »* est impossible, c'est l'ensemble vide.
- L'événement contraire de l'événement A *« On obtient 1 ou 2 »* est l'événement $\overline{A}$ *« On obtient 3, 4, 5 ou 6 »*.

Définition 18.3: Événement élémentaire

Les *événements élémentaires* sont les singletons $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$ est une issue.

Définition 18.4: Intersection / union d'événements

- Si A et B sont deux événements, on appelle A *et* B (resp. A *ou* B) l'événement $A \cap B$ (resp. $A \cup B$).
- Deux événements A et B sont *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 18.5: Système complet

Un *système complet d'événements* est un ensemble fini $\{A_1, \ldots, A_p\}$ d'événements de Ω telle que les A_i sont deux à deux incompatibles et telle que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$$

.

Exemple 18.3. On reprend l'exemple du jeu de cartes. On note A, B, C et D les événéments correspondants à tirer un pique, un coeur, un carreau ou un trèfle respectivement. Alors $\{A, B, C, D\}$ forme un système complet d'événements.

Pour le moment, on a seulement donné de nouveaux noms à des notions connues de la théorie des ensembles. La définition suivante nous fait véritablement entrer dans le monde des probabilités.

Définition 18.6: Mesure de probabilité

Soit Ω un univers fini. Une *mesure de probabilité* (ou simplement *probabilité*) est une fonction $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

— Si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (propriété d'additivité)

— $P(\Omega) = 1$ (propriété de normalisation)

Définition 18.7: Espace probabilisé (fini)

Un *espace probabilisé fini* (Ω, P) est la donnée d'un univers fini Ω et d'une mesure de probabilité P sur Ω.

Remarque 18.1. — Une probabilité mesure la *chance* qu'un événement $A \subset \Omega$ a de se produire, avec un nombre compris entre 0 et 1. La probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1. Ce fait permet de s'assurer que les calculs effectués sont corrects.

— La probabilité de l'événement certain Ω vaut 1.

— Si A et B sont incompatibles, ils ne peuvent pas être réalisés en même temps, donc $A \cup B$ se réalise si et seulement si soit A soit B se réalise. Ainsi $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple 18.4: Probabilité uniforme

Si Ω est un univers fini quelconque (non vide) on peut le munir d'une mesure de probabilité P définie par :

$$\forall A \subset \Omega, P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

On l'appelle **probabilité uniforme** sur Ω. Tous les événements élémentaires $\{\omega\}$ ont donc la *même chance* de se produire, au sens où pour tout ω dans Ω, $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{|\Omega|}$.

La propriété de normalisation est claire car

$$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|}$$

et la propriété d'additivité vient de ce que $|A \cup B| = |A| + |B|$ si A et B sont disjoints.

Exemple 18.5. On lance un dé à 6 faces et on demande la probabilité d'avoir un score pair. On modélise cela par l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$, muni de la probabilité uniforme. L'événement correspondant à avoir un score pair est $A = \{2, 4, 6\}$. Il est de cardinal 3 donc la probabilité d'avoir un score pair est $P(A) = 3/6 = 1/2$.

Exemple 18.6. On lance deux dés à 6 faces (discernables) et on demande la probabilité que la somme des deux scores soit 8. On modélise l'expérience par l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et on munit Ω de la probabilité uniforme. En effet, en l'absence d'autres hypothèses (dé truqué, non-indépendance des lancers...), on considère que c'est cette notion de *hasard* qui est sous-entendue par l'énoncé.

L'événement A : *« la somme des scores est égale à 8 »* est de cardinal 5, car

$$A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}.$$

On a donc $P(A) = 5/6^2 = 5/36$.

Remarque 18.2. **Ce qu'il ne faut pas faire.**

Dans l'exemple précédent, on n'est intéressé que par la somme des lancers. On pourrait donc être tenté de modéliser l'expérience par l'ensemble des sommes possibles et prendre $\Omega = [\![2,12]\!]$.

C'est tout à fait possible. Mais alors quelle probabilité mettre sur Ω ? On se convainc aisément que la probabilité uniforme ne convient pas (il y a plus de chances d'obtenir une somme égale à 8 qu'une somme égale à 12). On est alors bloqué car, trouver la probabilité *naturelle* sur Ω revient à faire le raisonnement du point précédent pour tous les résultats possibles de l'expérience.

On retiendra que le choix de l'univers dans lequel on travaille doit se faire à la lecture de l'expérience qui est faite (on lance deux dés), pas de la mesure qu'on va faire de cette expérience (on regarde la somme des deux scores).

Remarque 18.3. Nous verrons au fur et à mesure que la description précise de l'univers Ω et de sa mesure de probabilité P est rarement pertinente. Le plus important est de bien définir les événements étudiés et de traduire les hypothèses de l'énoncé en termes de probabilités.

18.1.2 Propriétés

Dans ce qui suit, (Ω, P) est un espace probabilisé fini fixé.

Propriété 18.1: Probabilité du complémentaire

Si A est un événement quelconque et B un événement inclus dans A, alors

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(B).$$

Si $A = \Omega$, on obtient la probabilité du complémentaire de tout événement B :

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B).$$

Démonstration. $A \setminus B$ et B sont deux ensembles disjoints, dont l'union vaut A. Ainsi par la propriété d'additivité, on obtient

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(B).$$

Pour le second point, en prenant $A = \Omega$, on a d'après la propriété de normalisation

$$P(A) = 1$$

et $A \setminus B = \overline{B}$.

Ainsi

$$P(B) + P(\overline{B}) = 1.$$

□

Propriété 18.2: Probabilité d'une union

Soient A et B deux événements de Ω. Alors,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Démonstration. On écrit $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$. On a $P\big(B \setminus (A \cap B)\big) = P(B) - P(A \cap B)$ par le principe d'additivité. De plus $P(A \cup B) = P(A) + P\big(B \setminus (A \cap B)\big)$ car A et $B - A \cap B$ sont disjoints.

On a donc $P(A \cup B) = P(A) + \big(P(B) - P(A \cap B)\big)$. □

Propriété 18.3: Probabilités dans un système complet

Soit $\{A_1, \ldots, A_p\}$ un système complet d'événements de Ω. Alors,

$$\sum_{i=1}^{p} P(A_i) = 1.$$

Démonstration. Par récurrence immédiate sur p, on montre d'abord que si $A_1, \ldots, A_p$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors $P(\bigcup_{i=1}^{p})A_i) = \sum_{i=1}^{p} P(A_i)$.

Si de plus, $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = \Omega$, on en déduit que $\sum_{i=1}^{p} P(A_i) = P(\Omega) = 1$. □

Propriété 18.4 (Croissance)**.** *Soient $A \subset B$ deux événements. Alors, $P(A) \leq P(B)$.*

Démonstration. On écrit $B = A \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big)$. L'union étant disjointe $P(B) = P(A) + P\big(B \setminus (A \cap B)\big)$. Comme une probabilité est toujours positive, on a $P(B) \geq P(A)$. □

Théorème 18.1: Caractérisation d'une mesure de probabilité

Écrivons $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et notons $p_i = P(\{\omega_i\})$ les probabilités des événements élémentaires. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Réciproquement, considérons $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini (sans mesure de probabilité fixée). Étant donnés une famille de réels $(p_1, \ldots, p_n)$ telle que

- $\forall i \in [\![1, n]\!] : p_i \in [0, 1]$,
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,

il existe une unique mesure de probabilité P sur Ω telle que,

$$\forall i \in [\![1, n]\!] : P(\{\omega_i\}) = p_i.$$

Démonstration. — $\Big\{\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\}\Big\}$ est un système complet d'événements de Ω. On a donc

$$\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1,$$

c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

— On se donne des p_i avec les conditions de l'énoncé. Pour l'existence d'une unique mesure de probabilité P satisfaisant les conditions données, on raisonne par Analyse-Synthèse :
  — **Analyse :** Supposons l'existence d'une mesure de probabilité P telle que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!] : P(\omega_i) = p_i.$$

  Soit A un événement de Ω. On peut écrire A sous la forme $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ où les indices i_j sont distincts dans $[\![1, n]\!]$.
  Par additivité, on a alors $P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\{\omega_{i_j}\}) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}$. Donc P est entièrement caractérisée par les conditions de l'énoncé, ce qui prouve l'unicité.
  — **Synthèse :** soit A un événement de Ω. On écrit $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ où les indices i_j sont distincts dans $[\![1, n]\!]$ et on définit P par $P(A) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}$. On doit vérifier que :
    — Pour tout événement A, $P(A) \in [0, 1]$. C'est vrai car la somme de tous les p_i vaut 1 et que chaque p_i est positif.
    — $P(\Omega) = 1$. En effet, par définition $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i$ et cette somme vaut 1.
    — P vérifie la propriété d'additivité. On considère A et B deux événements incompatibles. On écrit $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ et $B = \{\omega_{i_{k+1}}, \ldots, \omega_{i_l}\}$. Comme A et B sont incompatibles, tous les indices i_j sont distincts. Par définition, $P(A) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}$, $P(B) = \sum_{j=k+1}^{l} p_{i_j}$ et $P(A \cup B) = \sum_{j=1}^{l} p_{i_j}$. On a bien additivité.

□

18.2 Probabilités conditionnelles

Les probabilités conditionnelles formalisent ce qu'il est possible de dire quant à la réalisation d'un événement aléatoire, quand on sait qu'un autre s'est produit.

Dans ce qui suit (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

Définition 18.8: Probabilité conditionnelle

Soit A un événement de probabilité non nulle, soit B un événement. La *probabilité de B sachant A*, notée $P_A(B)$ (parfois $P(B \mid A)$ mais on évitera cette notation), est définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Remarque 18.4. Il n'existe pas d'événement $(B \mid A)$! La notation $P(B \mid A)$ est donc à prendre dans sa globalité ; ce n'est pas *a priori* la probabilité $P(C)$, pour un certain événement C.

Exemple 18.7. Considérons le lancer d'un dé à 6 faces, modélisé comme précédemment. Notons A l'événement : *faire un score pair* et B l'événement : *faire un score divisible par* 3.

L'évènement $A \cap B$ correspond à faire un 6. Donc $P(A \cap B) = 1/6$, tandis que $P(A) = 1/2$ et $P(B) = 1/3$.

On a donc $P_A(B) = (1/6)/(1/2) = 1/3$ et $P_B(A) = (1/6)/(1/3) = 1/2$.

Théorème 18.2: Une probabilité conditionnelle est une mesure de probabilité

Soit A un événement tel que $P(A) > 0$. Alors l'application $P_A : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, définie par

$$P_A : B \mapsto P_A(B)$$

est une mesure de probabilité sur Ω

Démonstration. — L'application P_A est bien à valeurs dans $[0, 1]$.

— On vérifie la propriété de normalisation :

$$P(\Omega) = 1.$$

— On vérifie la probabilité d'additivité : soient B et C deux événement incompatibles. Alors

$$P_A(B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C)}{P(A)}.$$

Or l'intersection est distributive sur l'union, donc

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Comme B et C sont incompatibles, $A \cap B$ et $A \cap C$ le sont également. On conclut.

□

Remarque 18.5. On peut donc utiliser les règles de calcul données précédemment aux probabilités conditionnelles. Par exemple :

$$P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C).$$

Propriété 18.5 (formule des probabilités composées)**.** *Soient* $A_1, \dots, A_n$ *des événements tels que* $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. *Alors*

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration. On écrit la définition des différentes probabilités conditionnelles et on simplifie le produit téléscopique obtenu. □

Exercice 18.1. Une urne contient trois boules blanches et sept boules noires. On tire successivement 3 boules sans remise de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches ?

Propriété 18.6 (formule des probabilités totales). *Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet d'événements. Soit B un événement. Alors,*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i).$$

Si chaque A_i est de probabilité non nulle, on a de plus :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B).$$

Démonstration. La première égalité vient du principe d'additivité.

La deuxième égalité vient de la définition d'une probabilité conditionnelle. □

Exercice 18.2. Une urne contient trois boules blanches et sept boules noires. On tire successivement 2 boules sans remise de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au second tirage ?

Propriété 18.7. *Soient A et B deux événements. Alors,*

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B).$$

Exprimée avec des probabilités conditionnelles :

$$P(B) = P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B).$$

Exercice 18.3. On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3. La première contient 0 boule blanche et 1 boule rouge. La deuxième contient 1 boule blanche et 2 boules rouges. La troisième contient 2 boules blanches et 3 boules rouges.

On fait l'expérience consistant à choisir une urne de façon équiprobable, puis à tirer une boule dans l'urne, de façon équiprobable. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

On note U_1, U_2 et U_3 les événements correspondant à choisir les urnes U_1, U_2 et U_3. Ils forment un système complet d'événements et chacun a probabilité $1/3$. Notons B l'événement consistant à tirer une boule blanche. On a donc :

— $P_{U_1}(B) = 0$;
— $P_{U_2}(B) = 1/3$;
— $P_{U_3}(B) = 2/5$.

Par la formule des probabilités totales, on a donc

$$P(B) = 1/3 \times 0 + 1/3 \times 1/3 + 1/3 \times 2/5 = 11/45.$$

Remarque 18.6. On n'a jamais précisé dans quel univers on travaillait, ce qui est souvent le cas dans ce genre d'exercices. L'important est de bien traduire les hypothèses de l'énoncé, de clairement nommer les événements et d'écrire les probabilités et probabilités conditionnelles données.

Si on veut vraiment préciser l'univers et la mesure de probabilité dessus, une façon commode consiste à utiliser une représentation sous forme d'arbre :

— D'un sommet central, partent trois branches allant vers des sommets notés U_1, U_2 et U_3. On indique au-dessus de ces branches la probabilité de choisir l'urne U_i, ici $1/3$ pour chacune.
— De chaque U_i partent deux branches, allant vers des sommets notés B_i et R_i (correspondant à prendre une boule blanche/rouge dans l'urne U_i). Au-dessus de ces deux branches, on indique la probabilité de sortir une boule de la couleur donnée quand l'urne U_i a été tirée.
— L'univers Ω est alors composé des éléments $\{B_1, R_1, B_2, R_2, B_3, R_3\}$ et les probabilités des événements élémentaires sont obtenues en multipliant les probabilité inscrites au-dessus des branches permettant d'aller à l'issue correspondante.

Par exemple, B_3 est l'événement $B \cap U_3$. Il est de probabilité $1/3 \times 2/5 = 2/15$.

Théorème 18.3: Formule de Bayes

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$

Remarque 18.7. En dépit de son apparence anecdotique, cette formule est fondamentale et une bonne compréhension de ce qu'elle dit permet d'éliminer beaucoup de contre-intuitions probabilistes courantes.

Propriété 18.8: Bayes et probabilités totales

Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est un système complet d'événements de probabilité non nulle et si B est un événement de probabilité non nulle, alors :

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!] : P_B(A_j) = \frac{P_{A_j}(B)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)}.$$

Exercice 18.4. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

Calculer la probabilité qu'un individu soit malade quand son test est positif.

Exercice 18.5. Dans un laboratoire, on a fait les constats suivants :

— si une souris porte l'anticorps A, alors 2 fois sur 5 elle porte aussi l'anticorps B ;

— si une souris ne porte pas l'anticorps A, alors 4 fois sur 5 elle ne porte pas l'anticorps B.

La moitié de la population porte l'anticorps A. Faire un arbre

1. Calculez la probabilité que, si une souris porte l'anticorps B, alors elle porte aussi l'anticorps A.
2. Calculez la probabilité que, si une souris ne porte pas l'anticorps B, alors elle ne porte pas l'anticorps A.

18.3 Indépendance

Dans ce qui suit (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

Définition 18.9: Événements indépendants

Soient A et B deux événements de Ω. On dit qu'ils sont *indépendants* si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Remarque 18.8.
- Un événement de probabilité 0 (ou de probabilité 1) est indépendant de tout autre événement.
- Si B est de probabilité non nulle, A et B sont indépendants si, et seulement si $P(A) = P_B(A)$. L'indépendance signifie donc que la connaissance que l'événement B s'est réalisé n'influe pas sur la probabilité que l'événement A se réalise (et inversement).

Remarque 18.9. On ne confondra pas les notions d'événements incompatibles et d'événements indépendants. Si A et B sont incompatibles, on a $A \cap B = \emptyset$ et donc $P(A \cap B) = 0$. Donc, le seul cas où deux événements incompatibles sont indépendants est le cas où au moins l'un des deux est de probabilité nulle.

Dans les exercices, il est plus ou moins implicite que certains événements sont indépendants. Par exemple, si on lance deux dés, il est sous-entendu, sauf mention du contraire, que les résultats des deux dés sont indépendants

On peut généraliser cette notion à un nombre fini d'événements.

Définition 18.10 (Événements mutuellement indépendants)**.** Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements de Ω. On dit qu'ils sont *mutuellement indépendants* (ou simplement *indépendants*) si pour tous indices distincts $i_1, \dots, i_k \in [\![1, n]\!]$,

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}).$$

Remarque 18.10. Cette propriété est plus forte *a priori* que l'indépendance deux à deux des événements (qu'on emploie rarement), comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 18.8. On considère deux lancers successifs (et indépendants) d'un dé classique. On considère A, B et C les événements :

— A : le premier résultat est pair ;

— B : le deuxième résultat est pair ;

— C : les deux résultats ont même parité.

Alors A, B et C sont deux à deux indépendants. En effet, les deux tirages sont indépendants donc A et B le sont. Par ailleurs, $C = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$. Donc $A \cap C = A \cap B$ ce qui donne $P(A \cap C) = 1/4$. Par ailleurs, $P(A) = 1/2$ et

$$P(C) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

On a donc bien $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, ce qui prouve l'indépendance de A et C. On montrerait de même que B et C sont indépendants.

Mais A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants ! En effet $A \cap B \cap C = A \cap B$ a probabilité $1/4$ alors que $P(A)P(B)P(C)$ vaut $1/8$.

Propriété 18.9. *Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note B_i un événement égal à A_i ou à $\bar{A}_i$.*

Alors, les événements $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de B_i égaux à $\bar{A}_i$ et par symétrie des rôles joués par les indices, il suffit de montrer le cas où $B_1 = \bar{A}_1$ et $B_i = A_i$ pour $i \geq 2$.

Soit $i_1, \dots, i_k$ des indices distincts entre 1 et n. On veut montrer que

$$P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) = P(B_{i_1}) \dots P(B_{i_k}).$$

Si aucun indice i_j n'est égal à 1, il n'y a rien à faire (puisqu'alors les B_{i_j} valent A_{i_j}).

On suppose donc qu'un indice est égal à 1, disons i_1 par symétrie. On doit donc montrer que

$$P(\bar{A}_1 \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(\bar{A}_1)P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$

Or, le premier terme vaut

$$P(A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) - P(A_1 \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

tandis que le deuxième vaut

$$(1 - P(A_1))P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$

On conclut en remarquant que

$$P(A_1 \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_1)P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

et que

$$P(A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}),$$

d'après la définition de l'indépendance mutuelle de $A_1, \dots, A_n$. □

Exercice 18.6. On lance deux fois une pièce de monnaire. On considère les événements suivants :

— A : on obtient pile au premier lancer

— B : on obtient face au second lancer.

— C : on obtient le même résultat aux deux lancers.

Les événements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ? Sont-ils 2 à 2 indépendants ?