TD$_{19}$ Espaces vectoriels

1 Espace vectoriel, sous-espace espace vectoriel

Exercice 1 (●○○ Exemples de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$)
Déterminer si les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de l'espace $\mathbb{K}^n$ précisé.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y = x + z\}$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
2. $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x + 1\}$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2\}$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
4. $E_4 = \{(\alpha + 2\beta + \gamma, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
5. $E_5 = \{(\alpha + 2, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
6. $E_6 = \mathbb{N}$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$?
7. $E_7 = \mathrm{Vect}\left((9, 4, 1), (3, i, 7), (0, 0, 1), (2 + i, 5, -i)\right)$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$?

Exercice 2 (●○○)
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$? Représenter graphiquement chaque exemple. On pourra utiliser une propriété utile du cours pour répondre par l'affirmative, ou bien chercher un contre-exemple.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$;
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 2\}$;
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \times y \geq 0\}$;
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \times y \leq 0\}$;
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$;
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$;

Exercice 3 (●○○)
L'ensemble des matrices de type 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix}$ muni de l'addition matricielle avec a et b des réels est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 4 (●○○)
Dans chacun des cas suivants, déterminer si les ensembles donnés (munis des opérations indiquées) forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

1. L'ensemble des matrice de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ avec les opérations habituelles.
2. L'ensemble des matrice de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ avec les opérations habituelles.

Exercice 5 (●○○)
On note $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$, démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en déterminant $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, de sorte que $H = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

On note $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$. Est-ce que $\mathbf{w} \in H$?

Exercice 6 (●○○)

1. Démontrer que $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ où a, b et c sont des réels fixés. Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 (●●●)

Soit E un espace vectoriel, F et G deux-sous espaces vectoriels de E.

1. Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2 Familles de vecteurs

Exercice 8 (●○○ Liberté, liberté chérie)

Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, déterminer si elle est libre ou liée. Lorsqu'elle est liée, donner une relation linéaire entre ses vecteurs.

1. $F_1 = \big((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)\big)$
2. $F_2 = \big((1,i,1,-i),(-i,1,-1,-i)\big)$
3. $F_3 = \big((1,i,0),(0,-i,1),(-i,0,i)\big)$
4. $F_4 = \big((2,0,-1),(0,1,1),(-2,3,4)\big)$
5. $F_5 = \big((1,1,0,1),(0,1,1,0),(0,0,3,-1),(1,0,2,0)\big)$
6. $F_6 = \big((2,1,0,0),(0,0,1,0),(0,1,1,2),(2,0,0,-2)\big)$

Exercice 9 (●●○)

Démontrer que les familles de vecteurs de E suivantes sont libres :

1. $((1,1,0),(1,0,1),(2,1,2))$ avec $E = \mathbb{R}^3$.
2. $((1,1,0,\dots,0),(0,1,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1,1),(1,0,\dots,0,1))$ avec $E = \mathbb{R}^n$ et $n \geq 3$ impair. *Si vous avez un peu de mal à commencer, traitez les cas $n = 3$ et $n = 5$.*

Exercice 10 (●●○)

Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base :

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y = 2x + z\}$
2. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + z = 0 \text{ et } 2x + 3y - 4z = 0.\}$
3. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = 3y = 2x + 2t\}$
4. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - 3y + t = 0 \text{ et } 3x - 5y + z - t = 0.\}$
5. $(\star)$ $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \text{ géométrique de raison } 2\}$
6. $(\star)$ $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0.\}$

Exercice 11 (●●○)

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $a = (1,0,1)$, $b = (-1,-1,1)$ et $c = (-2,1,-2)$. Démontrer que (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ dans cette base.

Exercice 12 (●●○)

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1,1,1)$, $v = (1,0,1)$ et $w = (0,-1,1)$. Démontrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ dans cette base.

Exercice 13 (●●●)
Soit E l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel.
2. En déterminer une base.

Exercice 14 (●●●)
A quelle condition sur le paramètre réel m la famille (u, v, w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

1. $u = (1, 2, 1),\ v = (2, 3, -1),\ w = (1, 1, m)$.
2. $u = (2 - m, -1, 0),\ v = (-1, 2 - m, -1),\ w = (0, -1, 2 - m)$.

3 Dimension, rang d'une famille de vecteurs

Exercice 15 (●●○)
On définit

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ y = -2z + t\}.$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la dimension de F ainsi qu'un système d'équations cartésiennes de F.
3. Déterminer une base de G ainsi que sa dimension.
4. On pose $E = F \cap G$. Déterminer une base de E ainsi que sa dimension.

Exercice 16 (●●○)
Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. $((1, 2, 2, 1); (5, 6, 6, 5); (-1, -3, 4, 0); (0, 4, -3, -1))$
2. $((2, 0, 4, 2); (1, 2, -2, -3); (3, 1, 3, 4); (2, 4, 9, 5))$
3. $((1, 1, 1, 1); (2, 1, 2, 1); (1, -1, 1, -1); (0, 1, 0, 1))$
4. $((m, 1, 1, 1); (1, m, 1, 1); (1, 1, m, 1); (1, 1, 1, m))$ où m est un paramètre réel.

Exercice 17 (●●○)

1. Démontrez que l'ensemble des matrices symétriques de taille 2 est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. En donner une famille génératrice puis une base.
2. Les matrices $\begin{bmatrix}1 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}4 & -1\\-1 & -5\end{bmatrix}$ forment-elles une base de ce sous-espace vectoriel ?
3. Dans l'affirmative, calculer les coordonnées de $\begin{bmatrix}4 & -11\\-11 & -7\end{bmatrix}$ dans cette base.

Exercice 18 (●●○)
Soient

$$A = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ \exists\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ M = \begin{pmatrix}a & b & c\\c & a & b\\b & c & a\end{pmatrix} \right\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en déterminer une base ainsi que sa dimension.

4 Vrai-Faux

Exercice 19 ()
Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? S'ils sont vrais, les démontrer, s'ils sont faux trouver un contre exemple.

1. Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors $E = F$.
2. $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille de E. $(e_1, \dots, e_n)$ est libre s'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que
$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n = 0_E.$$
3. $((1,2),(3,4),(-2,1))$ est une famille à 3 éléments de $\mathbb{R}^3$.
4. Dans un espace vectoriel de dimension 5, une famille de vecteurs à 3 éléments est libre.
5. Dans un espace vectoriel de dimension 3, une famille de vecteurs à 4 éléments est liée.
6. Dans un espace vectoriel de dimension 6, une famille de vecteurs à 7 éléments est génératrice.
7. Dans un espace vectoriel de dimension 8, une famille de vecteurs libre possédant 8 éléments est une base.
8. L'intersection de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel.
9. Une réunion de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.