Chapitre 19

Espaces vectoriels

Sommaire

On introduit les espaces vectoriels, qui sont des structures mathématiques dans lesquelles on peut convenablement généraliser les opérations usuelles définies sur les vecteurs de la géométrie.

Définition 19.1: Espace-vectoriel sur $\mathbb{K}$

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un ensemble E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (on dit aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) et on appelle

- *vecteurs* les éléments de E
- *scalaires* les éléments de $\mathbb{K}$

si l'on dispose des deux opérations suivantes :

- l'addition de deux vecteurs : si u et v sont dans E, leur somme $u + v$ est encore dans E ;
- la multiplication d'un scalaire et d'un vecteur (on parle aussi de multiplication externe) : si u est dans E et si λ est dans $\mathbb{K}$, λu est encore dans E.

On impose que ces deux opérations vérifient les propriétés suivantes :

- Pour tout u et v dans E, $u + v = v + u$.
- Pour tout u, v et w dans E, $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- Il existe un élément 0_E dans E tel que pour tout $u \in E$, $u + 0_E = u$.
- Pour tout $u \in E$, il existe $u' \in E$ tel que $u + u' = 0_E$.
- Pour tout a et b dans $\mathbb{K}$, pour tout u dans E, $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$.
- Pour tout a dans $\mathbb{K}$, pour tout u et v dans E, $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$.
- Pour tout a et b dans $\mathbb{K}$, pour tout u dans E, $(a \cdot b) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)$.
- Pour tout u dans E, $1 \cdot u = u$.

On a rencontré cette année plusieurs exemples d'ensembles dans lesquels ces opérations (l'addition et et la multiplication externe) avaient un sens :

- l'exemple le plus simple est $\mathbb{K}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$, par exemple $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc. ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^3$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$: là encore, le produit matriciel ne joue pas de rôle pour la structure d'espace vectoriel.
- $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, avec I un intevalle, l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ (ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
- $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, défini comme l'ensemble des suites à valeurs réelles (ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
- $\mathbb{K}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$: on peut ajouter deux polynômes ou multiplier un polynôme par un scalaire.

Dans toute la suite et sauf mention contraire. $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Propriété 19.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

- *Pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot u = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$.*
- *Pour tout $u \in E$, il existe un unique $u' \in E$ tel que $u + u' = 0_E$. On dit que u' est l'opposé de u, on le note $u' = -u$.*
- *Pour tout $u \in E$, $-u = (-1) \cdot u$.*

19.1 Combinaison linéaire, sous-espace vectoriel

On se place dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

19.1.1 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels

Définition 19.2. Soient $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs (c'est-à-dire des éléments) de E. Une *combinaison linéaire* de $v_1, \dots, v_k$ est un vecteur v de la forme

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$.

Exemple 19.1.

- Dans $E = \mathbb{R}^2$, $u = (2,3)$ est combinaison linéaire de $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ puisque $u = 2e_1 + 3e_2$.
- Dans $E = \mathbb{R}^3$, notons $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (0,0,1)$ et $v_3 = (2,4,5)$. On a $v_3 = 2v_1 - v_2$, donc v_3 est combinaison linéaire de v_1 et v_2.
- Dans $\mathbb{R}^2$, notons $v_1 = (1,0)$ et $v_2 = (2,0)$. Alors $v_3 = (3,0)$ est combinaison linéaire de v_1 et v_2. On a par exemple $v_3 = v_1 + v_2$, mais aussi $v_3 = 5v_1 - v_2$ ou $v_3 = 3v_1 = 3v_1 + 0v_2$.

  On voit à travers cette exemple que les coefficients dans la combinaison linéaire ne sont pas nécessairement uniques.
- Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, le polynôme $P = 2X^2 + X + 3$ est combinaison linéaire des polynômes 1, X et X^2. Plus généralement, et par définition, tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est combinaison linéaire des monômes 1, X, X^2, $\dots$, X^n.
- Dans $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considérons les trois fonctions f_0, f_2 et g définies par $f_0(\theta) = 1$, $f_2(\theta) = \cos(2\theta)$ et $g(\theta) = \cos^2\theta$. On sait que, pour tout θ réel :

  $$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}.$$

  Ceci peut être réécrit comme une égalité entre fonctions :

  $$g = \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{2} f_2.$$

  Donc g est combinaison linéaire de f_0 et f_2.

Définition 19.3. Une partie F de E est un *sous-espace vectoriel* si

- F est non vide ;
- $\forall\, u, v \in F, \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda u + \mu v \in F$

Exemple 19.2.

- Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la droite d passant par 0 et de vecteur directeur $u = (1,2)$ (on n'écrira de moins en moins les flèches sur les vecteurs). Si deux vecteurs sont sur d (on confond points et vecteurs...), ils sont colinéaires à u. Et donc une combinaison linéaire de ces deux vecteurs sera aussi colinéaire à u, donc aussi sur d.

  Donc d est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x - y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. C'est une droite passant par l'origine $(0,0)$.

- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est une droite passant par l'origine $(0, 0, 0)$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, toute droite passant par $(0, 0, 0)$ est un sous-espace vectoriel (même preuve que dans $\mathbb{R}^2$). De même, tout plan passant par $(0, 0, 0)$ (voir ci-dessous l'énoncé général sur les solutions d'un système linéaire homogène).
- Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & 3t & = 0 \\ 4x & + & 3y & + & 7z & + & t & = 0. \end{array}\right.$$

  et on note F l'ensemble de ses solutions. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
  D'abord, $(0, 0, 0, 0)$ est bien dans F. Considérons ensuite (x, y, z, t) et (x', y', z', t') des vecteurs dans F et λ, μ deux réels. On a

$$\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t').$$

  On calcule

$$\begin{aligned} &(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + 2(\lambda z + \mu z') + 3(\lambda t + \mu t') \\ &\qquad = \lambda(x + y + 2z + 3t) + \mu(x' + y' + 2z' + 3t') \\ &\qquad = \lambda \times 0 + \lambda \times 0 \text{ (car } (x, y, z, t) \text{ et } (x', y', z', t') \text{ sont dans } F) \\ &\qquad = 0. \end{aligned}$$

  Un calcul analogue donne aussi

$$4(\lambda x + \mu x') + 3(\lambda y + \mu y') + 7(\lambda z + \mu z') + (\lambda t + \mu t') = 0.$$

  Ainsi, $\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t')$ est dans F.
  Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

On retiendra le théorème suivant :

Théorème 19.1
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{K}^n$ d'un système linéaire homogène à n inconnues (et coefficients dans $\mathbb{K}$) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. En classe, et lien avec les exemples précédents. □

Remarque 19.1. Dans chaque espace vectoriel, il existe un *vecteur nul* 0_E, qu'on peut considérer comme l'origine de l'espace vectoriel. Dans $\mathbb{R}^n$, il s'agit de $(0, 0, \ldots, 0)$ (n coordonnées), dans $\mathbb{K}_n[X]$ du polynôme nul, dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ de la fonction nulle...

Tout sous-espace vectoriel F de E doit contenir ce vecteur nul 0_E. En effet, si v est un vecteur quelconque de E, on a $0_E = 0 \times v + 0 \times v$.

En pratique, quand on doit montrer qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel, on commence donc par montrer qu'elle contient 0_E.

Exemple 19.3.

- Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la droite d' passant par $(1,0)$ et dirigée par le vecteur $(1,1)$. Ce n'est *pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

  On peut ou bien remarquer que $(0,0)$ n'est pas sur d', ou bien voir autrement que d' n'est pas stable par combinaisons linéaires. Par exemple $(1,0)$ et $(2,1)$ sont sur d' mais pas $(3,1) = (1,0)+(2,1)$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, le cercle de centre 0 et de rayon 1 n'est pas un sous-espace vectoriel. Il ne contient pas l'origine.

Reprenons les exemples de sous-espaces vectoriels.

Exemple 19.4.

- Dans $E = \mathbb{K}[X]$, on note $F = \mathbb{K}_n[X]$ (n entier naturel fixé), l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

  Alors F est un sous-espace vectoriel de E. D'une part le polynôme nul est dans F, d'autre part si P et Q ont degré $\leq n$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\lambda P + \mu Q$ a aussi degré $\leq n$.

  Attention ! l'ensemble des polynômes de degré exactement n n'est *pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Par exemple $X+1$ et X sont de degré 1, mais pas $(X+1)-X$.
- Dans $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère l'ensemble F des solutions de l'équation différentielle

  $$y'' + y = 0.$$

  C'est un sous-espace vectoriel de E.

  D'abord, la fonction nulle est solution. Considérons maintenant deux fonctions y_1 et y_2 solutions et λ, μ deux réels. On a

  $$(\lambda y_1 + \mu y_2)'' + (\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(y_1'' + y_1) + \mu(y_2'' + y_2) = 0.$$

  Donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est dans F.

  Comme pour les systèmes linéaires homogènes, on remarque qu'on n'a pas besoin de résoudre le système pour montrer que l'ensemble de ces solutions a une structure de sous-espace vectoriel.
- Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites réelles, on considère l'ensemble F des suites (u_n) récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant la relation :

  $$\forall\, n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

  Alors F est un sous-espace vectoriel de E : la suite nulle est solution et si (u_n) et (v_n) sont solutions, la suite $\lambda(u_n) + \mu(v_n)$ aussi. (*adapter les calculs précédents*)

Définition 19.4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Deux vecteurs x et y de E sont dits colinéaires si l'un est combinaison linéaire de l'autre, autrement dit si l'un des deux est nul ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$.
- Trois vecteurs sont dits coplanaires si l'un est combinaison linéaire des deux autres. Autrement dit x, y et z sont coplanaires si deux des trois sont colinéaires ou s'il existe λ, $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda y + \mu z$.

Exemple 19.5.

- Dans $E = \mathbb{R}^2$, $u = (2,-6)$ et $v = (1,-3)$ sont colinéaires.

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, $x = (2, 1, 0)$, $y = (0, 3, 4)$ et $z = (4, 5, 4)$ sont coplanaires.

Propriété 19.2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soient $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs de F. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des scalaires. Alors, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ est dans F.*

Démonstration. Pour $k = 1$, on écrit $\lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 \times v_1$ pour se ramener à la définition. Pour $k = 2$, c'est la définition d'un sous-espace vectoriel. Pour un $k \geq 3$, on le montre par récurrence sur k. □

Remarque 19.2. On retiendra cette propriété fondamentale en disant qu'un sous-espace vectoriel est *stable par combinaisons linéaires.*

Propriété 19.3. *Soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. Alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. En classe. □

Exemple 19.6. L'intersection de deux plans distincts passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est une droite passant par l'origine.

Remarque 19.3. On généralise à une intersection finie de s.e.v.

Remarque 19.4. Il est tout à fait possible qu'il n'y ait que 0_E dans l'intersection. Par exemple, deux droites distinctes de $\mathbb{R}^2$ ont pour intersection $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ (l'ensemble ne contenant que l'origine).

Profitons-en pour constater que dans n'importe quel espace vectoriel E, la partie $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E. De même, la partie E elle-même (tout l'espace) est un sous-espace vectoriel de lui-même.

Remarque 19.5. Attention, le résultat précédent est en général faux pour l'union ! (voir le TD).

19.1.2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Définition 19.5: Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Soient $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs de E. On note $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ l'ensemble des combinaisons linéaires obtenues à partir de $v_1, \dots, v_k$:

$$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

Théorème 19.2

Soient $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs de E. Vect$(v_1, \dots, v_k)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. D'abord, 0_E est combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_k$ (en prenant tous les scalaires nuls). Ensuite, considérons u et v des vecteurs de $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$. On peut donc les écrire

$$u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \text{ et } v = \mu_1 v_1 \dots \mu_k v_k,$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$. Considérons aussi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On calcule :

$$\alpha u + \beta v = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1)v_1 + \cdots + (\alpha\lambda_k + \beta\mu_k)v_k.$$

Ainsi $\alpha u + \beta v$ est aussi dans $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$. Donc $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 19.6. La preuve consiste à montrer qu'une combinaison linéaire de combinaisons linéaires est une combinaison linéaire.

Définition 19.6. On appelle Vect$(v_1, \ldots, v_k)$ le *sous-espace vectoriel engendré* par $v_1, \ldots, v_k$.

Exemple 19.7.
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x - y = 0\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur $(1, 2)$.
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - y + z = 0\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$.

19.2 Familles de vecteurs

19.2.1 Famille génératrice

Définition 19.7: Famille génératrice

Si $(v_1, \ldots, v_k)$ est une famille de vecteurs de E, on dit que $(v_1, \ldots, v_k)$ est une *famille génératrice* de E si Vect$(v_1, \ldots, v_k) = E$.

Ainsi, une famille $(v_1, \ldots, v_k)$ est génératrice de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_k$. A priori, cette combinaison ne sera pas unique. Donner un exemple.

Plus généralement, on peut parler de *famille génératrice* pour un sous-espace vectoriel F de E : c'est une famille $(v_1, \ldots, v_k)$ de vecteurs de F tels que Vect$(v_1, \ldots, v_k) = F$.

Exemple 19.8.
- $(1, i)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
- Donner une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Propriété 19.4. *Si F est un sous-espace vectoriel de E et $(x_1, \ldots, x_k)$ est une famille génératrice de F alors toute famille de vecteurs de F contenant $(x_1, \ldots, x_k)$ est également génératrice de F.*

Propriété 19.5 (Lemme de réduction)**.** *Si $v \in$ Vect$(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ alors Vect$(x_1, x_2, \ldots, x_k, v) =$ Vect$(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.*

Exemple 19.9 (Passer d'une expression analytique à une famille génératrice). Donner une famille génératrice de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - 2z = 0 \text{ et } x + y = 0\}$.

Exemple 19.10. Donner une famille génératrice de $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - 3z = 0\}$.

Exemple 19.11. Les vecteurs $u_1 = (1, 0, -1)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$ engendrent-ils $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$? Si non, déterminer Vect(u_1, u_2).

Même question avec $v_1 = (1, -1, -1)$, $v_2 = (-1, 1, -1)$ et $v_3 = (-1, -1, 1)$.

19.2.2 Familles libres

On a vu précédemment qu'un même vecteur pouvait parfois s'écrire de différentes façons comme combinaison linéaire d'une même famille de vecteur. Cela arrive quand la famille n'est pas *libre* au sens suivant.

Définition 19.8: Famille libre

Soient $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs dans E.

1. On dit que la famille $(v_1, \dots, v_k)$ est libre si
$$\forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} : (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0_E) \implies (\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0).$$
On dit également que les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ sont linéairement indépendants.
2. Une famille qui n'est pas libre est dite liée : il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ dont l'un au moins est non nul tels que
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0.$$
On dit aussi que les vecteurs sont linéairement dépendants.

Propriété 19.6. *Soit $(v_1, \dots, v_k)$ une famille de vecteurs de E. Alors la famille $(v_1, \dots, v_k)$ est libre si et seulement si $\forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$:*
$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k) \implies (\forall\, i \in [\![1, k]\!] : \lambda_i = \mu_i)$.

Remarque 19.7. La première condition dit que la seule façon d'obtenir 0_E comme combinaison linéaire des v_i est de prendre chaque scalaire égal à 0. La deuxième condition est une propriété du type *identification des coefficients*.

Démonstration. Montrons l'équivalence des deux conditions.

- Supposons la première condition vérifiée. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_k$ des scalaires tels que
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k.$$
Alors, $(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_k - \mu_k) v_k = 0_E$. D'après la première condition, cela implique que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, c'est-à-dire $\lambda_i = \mu_i$.
- Supposons la deuxième condition vérifiée. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des scalaires tels que
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0_E.$$
On a donc $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \times v_1 + \cdots + 0 \times v_k$. D'après la deuxième condition cela implique que tous les λ_i sont nuls.

□

Remarque 19.8: Montrer qu'une famille est libre

Pour montrer qu'une famille $(v_1, \dots, v_k)$ est libre, on suppose qu'une combinaison linéaire $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ est nulle et on montre que cela implique que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k$ sont nuls.
En général on résout un système linéaire homogène, dont on montre que la seule solution est la solution nulle.

Exemple 19.12. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille formée de $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 0)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$ est libre. Considérons en effet trois scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0.$$
En regardant coordonnées par coordonnées, on a donc $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_3 = 0$. Donc les trois λ_i sont nuls.

Exemple 19.13. Dans $\mathbb{R}[X]$, la famille formée par 1, $(X-1)$ et $(X-1)^2$ est libre. En effet, soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 + \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X-1)^2 = 0$. On a donc

$$\lambda_2 X^2 + (\lambda_1 - 2\lambda_2)X + (\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

Par identification des coefficients, cela implique que les trois λ_i sont nuls.

Exemple 19.14. Étudier la liberté de la famille (x_1, x_2, x_3) donnée par $x_1 = (0,1,2)$, $x_2 = (1,0,2)$ et $x_3 = (1,2,0)$.

Exemple 19.15. Étudier la liberté de la famille (x_1, x_2, x_3) donnée par $x_1 = (0,1,2)$, $x_2 = (1,0,2)$ et $x_3 = (-1,2,2)$.

Propriété 19.7. *Une famille constituée d'un unique vecteur v est libre ssi v est non nul.*
Une famille constituée de deux vecteurs v_1 et v_2 est libre ssi v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

Propriété 19.8. *Une famille de vecteurs est liée si et seulement si au moins l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.*

Exemple 19.16. Donner une famille libre de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

19.2.3 Bases

Définition 19.9. Une *base* d'un espace vectoriel E est une famille de vecteurs qui est à la fois libre et génératrice.

Remarque 19.9. On parle aussi de base pour un sous-espace vectoriel F, avec la même définition.

Exemple 19.17. Dans $\mathbb{R}^3$, on a montré précédemment que la famille formée de $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,0)$ et $v_3 = (0,0,1)$ est libre. On montre aussi qu'elle est génératrice, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Les espaces vectoriels de référence possèdent une base plus naturelle que les autres, qu'on appelle la *base canonique*.

Définition 19.10. Soient n, des entiers naturels.

- La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la famille $(e_1, \dots, e_n)$, où e_i est le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont la i-ème coordonnée vaut 1 et les autres 0 :

$$e_1 = (1,0,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,1).$$

- La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille formée par les matrices $E_{i,j}$, avec $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$. La matrice $E_{i,j}$ a pour coefficient 1 en position (i,j) et 0 dans les autres positions.
  Par exemple, dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$:

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propriété 19.9: Caractérisation des bases

Soit E un espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique sur les $e_1, \dots, e_n$:

$$\forall\, u \in E, \quad \exists!(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n \;/\; u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \cdots + u_n e_n.$$

Les $u_1, \dots, u_n$ s'appellent les coordonnées de u dans la base $e_1, \dots, e_n$.

Remarque 19.10. Dans un espace vectoriel E, la notion de coordonnées n'a pas de sens *en soi*. Cette notion est toujours relative à la base B : il faut préciser selon quelle base on considère ces coordonnées.

Par ailleurs parler de coordonnées par rapport à une famille $(v_1, \dots, v_k)$ qui n'est pas une base n'a pas de sens non plus : ou bien x ne s'exprimera pas nécessairement comme combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_k$ (si la famille n'est pas génératrice), ou bien cette combinaison ne sera pas unique (si la famille n'est pas libre).

Exemple 19.18.

- Dans $\mathbb{K}^n$, les coordonnées d'un vecteur x selon la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ sont ses coordonnées au sens usuel du terme : si $x = (x_1, \dots, x_n)$, les coordonnées sont $x_1, \dots, x_n$ car $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les coordonnées d'une matrice M selon la base canonique formée par les $E_{i,j}$ (avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$) sont les coefficients de M.
- D'autres exemples.

Exemple 19.19 (Donner une base d'un sous-espace vectoriel donné sous forme analytique)*.* Donner une base de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \;/\; x + y + 2x = 0\}$.

Exemple 19.20 (Donner une base d'un sous-espace vectoriel donné par une famille génératrice)*.* Donner une base de $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right)$.

Exemple 19.21. Montrer que la famille

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right)$$

est une base de $\mathbb{K}^3$ et donner les coordonnées de tout vecteur dans cette base.

Définition 19.11 (Coordonnées dans une base)**.** Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors à tout vecteur u de E, on peut associer l'unique matrice colonne $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$ telle que

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i.$$

On dit que c'est la matrice colonne des coordonnées de u dans la base B, notée

$$\text{Coord}_B(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Propriété 19.10. *Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre, alors c'est une base de Vect$(u_1, \dots, u_n)$.*

19.3 Dimension

19.3.1 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 19.3: Dimension d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel. Si E a deux base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors ces deux bases ont le même nombre d'éléments.

Définition 19.12. Ce cardinal commun à toutes les bases de E est la *dimension* de E.

Remarque 19.11. Cette notion s'applique bien sûr également à un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E.

Exemple 19.22.

- $\mathbb{C}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, et de dimension 1 sur $\mathbb{C}$.
- La dimension de $\mathbb{K}^n$ est n, puisqu'on dispose de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$, de cardinal n.
- La dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est np. En effet, il y a np dans la base canonique formée par les matrices $E_{i,j}$ (avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$).
  En particulier, la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (matrices carrées de taille n) **est** n^2.

Exemple 19.23. L'espace vectoriel $\{0\}$ constitué seulement du vecteur nul a pour dimension 0.

19.3.2 Familles libres, familles génératrices et dimension

On regroupe ici les résultats liant les notions de familles libres et génératrices à la dimension de l'espace vectoriel. Ces résultats sont plutôt intuitifs et peuvent se démontrer avec la même approche que celle suivie dans la démonstration du fait que deux bases d'un espace vectoriel ont même cardinal.

Propriété 19.11 (Familles libres et dimension)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension n.*

- *Si $(v_1, \dots, v_k)$ est une famille libre de E, alors $k \leq n$.*
- *Une famille libre de E de cardinal n est une base de E.*
- *Si $(v_1, \dots, v_k)$ est une famille libre de E, on peut la compléter en une base de E : c'est-à-dire trouver des vecteurs $v_{k+1}, \dots, v_n$ tels que la famille $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ est une base de E.*

Propriété 19.12 (Familles génératrices et dimension)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension n.*

- *Si $(v_1, \dots, v_k)$ est une famille génératrice de E, alors $k \geq n$.*

- *Une famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.*
- *Si $(v_1, \dots, v_k)$ est une famille génératrice de E, on peut en extraire une base de E : c'est-à-dire sélectionner n indices $i_1, \dots, i_n$ parmi $1, \dots, k$ tels que la famille $(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ soit une base de E.*

Remarque 19.12. Dans ces deux propositions, la deuxième assertion affirme que, pour montrer qu'une famille de n vecteurs de E (de dimension n) est une base de E, il suffit de montrer que la famille libre OU génératrice. On peut considérer que des arguments de dimension permettent de ne faire que la moitié du travail.

Quand on a le choix, on montre en général que la famille est libre.

Exemple 19.24. Les familles suivantes forment-elles une base de l'espace vectoriel sous-jacent ?

1. $((1,1,0),(1,0,1))$ dans $\mathbb{K}^3$?
2. $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,0)$ dans $\mathbb{K}^3$?

19.3.3 Rang d'une famille de vecteurs

Propriété 19.13. *Soit E un espace vectoriel (de dimension finie), soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\dim(F) \leq \dim(E)$.*

De plus, si on a l'égalité $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Démonstration. Notons n la dimension de E et k la dimension de F. Considérons une base $(v_1, \dots, v_k)$ de F. C'est une famille libre à k éléments dans F, donc dans E. Comme E est de dimension n, on doit avoir $k \leq n$.

De plus, si $k = n$, on sait que la famille libre $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E. Comme c'est par définition une base de F, on a $F = E$. □

Remarque 19.13. On a bien sûr un énoncé analogue si on considère deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E :

- Si $F \subset G$, alors $\dim(F) \leq \dim(G)$;
- Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

On voit de nouveau qu'un argument sur la dimension permet de ne faire que la *moitié du travail* : on ne prouve que l'inclusion $F \subset G$ pour montrer l'égalité $F = G$.

Exemple 19.25. La dimension d'un sous-espace vectoriel est le premier élément permettant de comprendre cet espace vectoriel.

- Dans $\mathbb{R}^2$, les sous-espaces vectoriels sont de dimension 0 (seul le sous-espace $\{0\}$), 1 (les droites passant par l'origine) ou 2 (seul $\mathbb{R}^2$ lui-même).
- Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces vectoriels sont de dimension 0 (seul le sous-espace $\{0\}$), 1 (les droites passant par l'origine), 2 (les plans passant par l'origine), 3 (seul $\mathbb{R}^3$ lui-même).

Définition 19.13. Soient $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs d'un espace vectoriel E. Le *rang* de la famille $(v_1, \dots, v_k)$, noté rg$(v_1, \dots, v_k)$, est la dimension de Vect$(v_1, \dots, v_k)$.

Propriété 19.14. *Considérons k vecteurs $v_1, \dots, v_k$ dans un espace vectoriel E de dimension n. Notons p le rang de $(v_1, \dots, v_k)$. On a l'inégalité $p \leq \min(n,k)$. De plus,*

- *$p = n$ ssi la famille $(v_1, \dots, v_k)$ est génératrice de E ;*

- $p = k$ *ssi la famille* $(v_1, \dots, v_k)$ *est libre.*

Démonstration. Notons $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$. Par définition, $p = \dim(F)$. Comme $F \subset E$, on a $p \leq n$. De plus, si $p = n$, on a $F = E$ et donc $(v_1, \dots, v_k)$ est génératrice de E.

Comme la famille $(v_1, \dots, v_k)$ est par définition génératrice de F, de dimension p, on a $k \geq p$. De plus, $k = p$ ssi $(v_1, \dots, v_k)$ est une base de F ssi $(v_1, \dots, v_k)$ est libre. □

Remarque 19.14. Considérons deux familles de vecteurs $(v_1, \dots, v_k)$ et $(w_1, \dots, w_l)$ telles que la première est une sous-famille de la seconde (chaque v_i est un des w_j).

Alors $\text{rg}(v_1, \dots, v_k) \leq \text{rg}(w_1, \dots, w_l)$. En effet $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) \subset \text{Vect}(w_1, \dots, w_l)$.

Exercice 19.1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (0, 1, 2, 3)$ et $w = (2, 5, 8, 11)$. Quel est le rang de (u, v, w) ?

Résolution. Comme (u, v, w) est une famille de trois vecteurs, on sait déjà que $\text{rg}(u, v, w) \leq 3$. De plus, on constate que la famille (u, v) est libre (les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires). Donc

$$\text{rg}(u, v, w) \geq \text{rg}(u, v) = 2.$$

Ainsi, on a $\text{rg}(u, v, w) = 2$ ou 3. Pour le déterminer, on cherche si (u, v, w) est une famille libre, par la méthode usuelle. On trouve finalement que $2u + v - w = 0$. Donc la famille n'est pas libre.

Donc $\text{rg}(u, v, w) = 2$.

Théorème 19.4 (Calcul pratique du rang)
Le rang d'une famille $(v_1, \dots, v_k)$ *de vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *est le rang de la matrice à* n *lignes et* k *colonnes, dont les coefficients sur une colonne* $i \in [\![1, n]\!]$ *sont les coordonnées de* v_i.

On admet ce théorème. Il peut être démontré par un raisonnement abstrait basé sur le pivot de Gauss. Mais il sera plus naturel, en considérant des opérations naturelles sur les colonnes, plutôt que sur les lignes (programme de deuxième année).

Remarque 19.15. Soient $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note M la matrice $n \times k$ dont les coefficients de la colonne i sont les coordonnées de v_i. Alors

- Le rang de $(v_1, \dots, v_k)$ est le rang de M.
- La famille est libre ssi ce rang est égal au nombre de colonnes.
- La famille est génératrice ssi ce rang est égal au nombre de lignes.

C'est une simple reformulation des résultats précédents.