Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1A – Année 2023/2024
M. Marmorat

DS 7 – Mathématiques

Mercredi 3 Avril 2024

Durée de l'épreuve : 3 heures

Évitez les ratures (effacez ou barrez d'un simple trait d'éventuelles erreurs, utilisez un brouillon si possible).

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique **à rédiger sur une feuille à part** et de deux problèmes de mathématiques.

Exercice 1 (Python).
1. Écrire un script Python qui crée la liste des carrés des 1000 premiers entiers.
2. Écrire une fonction qui prenne en entrée une liste d'entiers L et qui calcule la somme des éléments de L.
3. Définissez une fonction `nombre_positifs` prenant en argument une liste de nombres L et renvoyant le nombre d'éléments positifs de la liste L.

Problème 1. On désigne par n un nombre entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation

$$e^x = x^n,$$

que l'on note (E_n). À cet effet, on introduit la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

A. Étude des racines positives de $(E_\mathbf{n})$.

1. Étude des racines positives des équations (E_1) et (E_2).
   (a) Étudier et représenter sur $[0; +\infty[$ les fonctions f_1 et f_2.
   (b) Étudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1) et (E_2).
2. Étude des racines positives de l'équation (E_3)
   (a) Étudier et représenter sur $[0; +\infty[$ la fonction f_3.
   En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives $u < v$ et que $2 < u < 3$ et $4 < v < 5$.
   (b) Soit la suite (y_n) définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale y_0 où y_0 est un nombre réel strictement supérieur à u.
      i. Montrer que, si $u < y_0 \leqslant v$, alors :
         - pour tout entier naturel n , $u < y_n \leqslant v$.
         - $y_1 \geqslant y_0$
         - la suite (y_n) est croissante.
      ii. Montrer que, si $v \leqslant y_0$, alors
         - pour tout entier naturel n, $v \leqslant y_n$.
         - $y_1 \leqslant y_0$
         - la suite (y_n) est décroissante.
      iii. Étudier enfin la convergence et la limite de la suite (y_n).

3. Étude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geqslant 3$.
   (a) Étudier sur $[0; +\infty[$ la fonction f_n. En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < v_n$.
   (b) Déterminer, pour $n \geqslant 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$.
   Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (u_n) , puis prouver la convergence de celle-ci.
   (c) Montrer que $u_n = \exp(\dfrac{u_n}{n})$, et en déduire la limite L de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Déterminer, pour $n \geqslant 4$, le signe de $f_n(v_{n-1})$. Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (v_n), puis étudier la limite de celle-ci.

B. Étude des racines négatives de $(E_\mathbf{n})$.

1. Existence de racines négatives de (E_n).
   (a) Étudier sur $]-\infty; 0]$ les fonctions f_{2k} et f_{2k-1} pour tout entier $k \geqslant 1$.
   (b) À quelle condition sur l'entier n l'équation (E_n) admet-elle des racines négatives ?
2. Étude des racines négatives de l'équation (E_{2n}).
   (a) Encadrer entre deux entiers consécutifs la racine négative w_n de l'équation (E_{2n}) et déterminer, pour $n > 2$, le signe de $f_{2n}(w_{n-1})$.
   (b) En déduire le sens de variation, la convergence et la limite L de la suite (w_n).

Problème 2. : On dispose de deux pièces indiscernables : l'une équilibrée et l'autre déséquilibrée qui donne Face avec la probabilité $p > \dfrac{1}{2}$.

On effectue une série de trois lancers en choisissant l'une des deux pièces avant chaque lancer. On gagne le jeu lorsqu'on obtient Face au troisième lancer.

Le but de cet exercice est de comparer plusieurs stratégies afin de trouver celle qui maximise nos chances de gagner le jeu.

Pour cela, on note pour tout $n \in [\![1, 3]\!]$:

- E_n l'événement "on choisit la pièce équilibrée au n-ième lancer"
- F_n l'événement "on obtient Face au n-ième lancer"

1. Exprimer $P(F_n)$ en fonction de p et de $P(E_n)$.
2. Stratégie 1 : À chaque lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable.
   Montrer que $\forall\, n \geqslant 1,\ P(F_3) = \dfrac{2p+1}{4}$
3. Stratégie 2 : Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Si on obtient Face, on continue d'utiliser la même pièce pour tous les lancers suivants. Sinon, on utilise l'autre pièce pour tous les lancers suivants.
   (a) Donner $P(F_1)$.
   (b) Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{E_1}(E_3)$ et $P_{\overline{E_1}}(E_3)$.
   (c) En déduire $P(E_n)$.
   (d) Montrer que $P(F_3) = \dfrac{4p^2+3}{8}$
4. Stratégie 3 : Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Puis, à chacun des lancers suivants, on utilise la même pièce que le lancer précédent si on a obtenu Face, sinon, on change de pièce.
   (a) Donner $P(F_1)$ et $P(F_2)$.

(b) Montrer qu'il existe deux réels $a \in]0,1[$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in [\![1,2]\!]$, $P(E_{n+1}) = aP(E_n) + b$.

(c) En déduire une expression de $P(E_n)$ en fonction de a, b et n.

(d) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $P(F_3) = \dfrac{1}{3-2p}\left(1 - \left(\dfrac{2p-1}{2}\right)^4\right)$

5. Comparer les stratégies 1, 2 et 3.

$\mathscr{F}\mathscr{I}\mathscr{N}$
