Chapitre 20

Polynômes

Sommaire

20.1 Ensemble des polynômes

20.1.1 Définitions, opérations de base

Définition 20.1

Soit P une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que P est une application polynomiale ou un polynôme (stricto-sensu ces deux termes ne recouvrent pas les mêmes notions mais on fera l'abus de notation) s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un $n+1$-uplet $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Pour $i \in [\![0, n]\!]$ on appelle alors a_i le coefficient d'indice i de P.
On appelle polynôme nul le polynôme dont tous les coefficients sont nuls, c'est donc l'application nulle.
On appelle polynôme constant tout polynôme de la forme $P : x \mapsto a_0$.
On appelle polynôme affine tout polynôme de la forme $P : x \mapsto a_0 + a_1 x$.
On appelle monôme de degré k tout polynôme de la forme $P : x \mapsto a_k x^k$

Définition 20.2: Notation des polynômes (Hors programme)

Par convention on note X l'application $x \mapsto x$. Ainsi $a_k X^k$ est l'application $x \mapsto a_k x^k$.
Avec ces notations $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ se note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
On appelle cette écriture l'écriture développée de P.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exemple 20.1. $P(x) = x^2 + 2x + 1$, $Q(x) = x^3 - 4x + 12$ et $R(x) = x^{1000} - 27$ sont des polynômes.

Définition 20.3: Opération sur les polynômes

Soient $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \mapsto \sum_{j=0}^{d} b_j x^j$ deux polynômes. On définit alors les polynômes suivants :

— $P + Q$ est le polynôme défini par $P + Q : x \mapsto P(x) + Q(x)$. On a alors

$$P + Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{\max(n,d)} (a_k + b_k) x^k$$

où, par convention $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > d$.

— Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, λP est le polynôme défini par $\lambda P : x \mapsto \lambda \times P(x)$. On a alors

$$\lambda P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k$$

— PQ est le polynôme défini par $PQ : x \mapsto P(x) \times Q(x)$. On a alors

$$PQ : x \mapsto \sum_{k=0}^{n+d} c_k x^k$$

où

$$\forall\, k \in [\![0, n+d]\!], \qquad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

là encore, par convention $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > d$.

— $P \circ Q$ est le polynôme définit par $P \circ Q : x \mapsto P(Q(x))$. Il n'y pas vraiment d'écriture simple de $P \circ Q$.

Propriété 20.1. *Soit P un polynôme. P est alors continu sur $\mathbb{R}$*

Démonstration. Il est évident que $x \mapsto x$ est continu sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$ est donc continu sur $\mathbb{R}$ en tant que puissance d'une fonction continu. Enfin P est continu sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues. □

Théorème 20.1
Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme à coefficients réels. Alors $P = 0$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Démonstration. — Il est évident que si tous les coefficients de P sont nuls alors P est le polynôme nul.

— Réciproquement supposons que P est le polynôme nul, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

On va montrer par récurrence forte sur k que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = 0$

<u>Initialisation</u>

On a $a_0 = P(0) = 0$.

Détaillons comment procéder pour en déduire alors que $a_1 = 0$, cela n'est pas nécessaire pour la récurrence mais permet d'éclairer la construction de la preuve.

Comme $a_0 = 0$ on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k = x \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} x^j$$

Notons $P_1 = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} x^j$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = xP_1(x) = 0$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad P_1(x) = 0$$

Or P_1 est continu, ainsi $P_1(0) = \lim_{x\to 0} P_1(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

Or $P_1(0) = a_1$.

On a donc bien $a_1 = 0$

<u>Hérédité :</u>

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On suppose que $a_0 = a_1 = \cdots = a_k - 1 = 0$ et on va montrer qu'alors $a_k = 0$

Comme $a_0 = a_1 = \cdots = a_k - 1 = 0$ on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{i=k}^{n} a_i x^i = x^k \sum_{l=0}^{n-k} a_{l+k} x^l$$

Notons $P_k = \sum_{l=0}^{n-k} a_{l+k} x^l$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^k P_k(x) = 0$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad P_k(x) = 0$$

Or P_k est continu, ainsi $P_k(0) = \lim_{x\to 0} P_k(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

Or $P_k(0) = a_k$.

On a donc bien $a_k = 0$. Ce qui prouve la propriété au rang k et achève la récurrence.

□

Une conséquence importante est le théorème suivant

Théorème 20.2

L'écriture développée d'un polynôme est unique.
En d'autres termes, si $\forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{j=0}^{d} b_j x^j$ alors $n = d$ et

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \qquad a_k = b_k$$

Démonstration. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{j=0}^{d} b_j X^j$.

Si $P = Q$ alors $P - Q = \sum_{k=0}^{\max(n,d)} (a_k - b_k) X^k = 0$, où, par convention $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_j = 0$ si $j > d$ D'après les théorèmes précédents on a alors

$$\forall\, k \in [\![0, \max(n, d)]\!] a_k = b_k$$

□

20.1.2 Degré d'un polynôme, Polynôme dérivé

Définition 20.4: Degré d'un polynôme

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme non-nul.
On appelle degré de P, noté $\deg(P)$ le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$, c'est-à-dire

$$\deg(P) = \max\{k \in [\![0, n]\!]\ ,\ a_k \neq 0\}$$

On appelle alors $a_{\deg(P)}$ le coefficient dominant de P et $a_{\deg P} X^{\deg(P)}$ le terme ou monôme dominant de P.
(Hors programme) On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Un polynôme de coefficient dominant égal à 1 est dit unitaire.
Par convention, on dit que le degré du polynôme nul vaut $-\infty$.

Remarque 20.1. Comme $P \neq 0$ alors $\{k \in [\![0, n]\!]\ ,\ a_k \neq 0\}$ est un ensemble fini non-vide qui admet donc bien un maximum.

Exemple 20.2. Degré et coefficient dominant des polynômes

- $:\mapsto 2x - 1$
- $x \mapsto -2x^3 + 12x^2 + 1$
- $:\mapsto 6x^4 + 12x - 8$
- $:\mapsto 3$
- $:\mapsto 0$

Remarque 20.2. Par convention le degré du polynôme nul vaut $-\infty$, (ce qui est cohérent avec la convention qui veut que la borne supérieure de l'ensemble vide vaut $-\infty$).

Théorème 20.3: Degré et opération sur les polynômes

Soit P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On a alors

- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

Démonstration. Les trois premiers points viennent des formes développées de $P+Q$, λP et $P \times Q$.

On pourrait donner une écriture développé de $P \circ Q$ pour prouver la dernière formule mais on va plutôt réinvestir notre connaissance des équivalents.

On a vu que $P(n) \sim n \to +\infty a_{\deg(P)} m^{\deg(P)}$ et que $Q(n) \sim n \to +\infty b_{\deg(Q)} n^{\deg(Q)}$.

Ainsi, pour $k \in [\![0, \deg(P)]\!]$ on a $Q(n)^k \sim +\infty \left(b_{\deg(Q)} n^{\deg(Q)}\right)^k \sim +\infty b^k_{\deg(Q)} n^{k \deg(Q)}$

On a, de plus, si $k < l$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{Q(n)^k}{Q(n)^l} = 0$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k Q(n)^k \sim +\infty a_{\deg(P)} Q(n)^{\deg(P)} \sim +\infty a_{\deg(P)} b^{\deg(P)}_{\deg(Q)} n^{\deg(Q) \times \deg(P)}$$

Ce qui nous montre que $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ et que le coefficient dominant de $P \circ Q$ est $a_{\deg(P)} b^{\deg(P)}_{\deg(Q)}$. □

Propriété 20.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des polynômes de degré inférieurs ou égal à n, $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace-vectoriel.*

Définition 20.5: Polynôme dérivé

Soit P un polynôme réel avec $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$.
On appelle polynôme dérivé de P le polynôme, noté P' défini par

$$P' : x \mapsto \sum_{k=1}^{d} k a_k x^{k-1}$$

Exemple 20.3. Exemple de polynôme dérivé.

Définition 20.6: (Hors programme)

Soit P un polyôme réel, on appelle k-ième polynôme dérivée de P le polynôme noté $P^{(k)}$ défini par récurrence par

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad P^{(k+1)} = (P^{(k)})' \end{cases}$$

Propriété 20.3. *Soient P et Q deux polynômes réels et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors*

- $(\lambda P)' = \lambda P'$

- $(P+Q)' = P' + Q'$
- $(PQ)' = P'Q + PQ'$
- $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$

Démonstration. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, on a alors

— $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$, d'où

$$(\lambda P)' = \sum_{k=1}^{n} k\lambda a_k X^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \lambda P'$$

— $P + Q = \sum_{k=0}^{max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$, d'où

$$(P+Q)' = \sum_{k=0}^{max(n,m)} k(a_k+b_k)X^{k-1} = \sum_{k=0}^{max(n,m)} k a_k X^{k-1} + k b_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{max(n,m)} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=0}^{max(n,m)} k b_k X^{k-1} = P'$$

— On a $PQ = \sum_{k=0}^{n+d} c_k X^k$ où

$$\forall\, k \in [\![0, n+m]\!], \qquad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Ainsi $(PQ)' = \sum_{k=1}^{n+m} k c_k X^{k-1} = \sum_{i=0}^{n+m-1} (i+1) c_{i+1} X^i$

On a de plus

$$PQ' = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k b_k X^{k-1}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)\left(\sum_{i=0}^{m-1} (i+1) b_{i+1} X^i\right) = \sum_{i=0}^{n+m-1} d_i X^i$$

où

$$\forall\, i \in [\![0, n+m-1]\!], \qquad d_i = \sum_{j=0}^{k} a_j (k-j+1) b_{k-j+1}$$

et

$$P'Q = \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} (i+1) a_{i+1} X^i\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k\right) = \sum_{i=0}^{n+m-1} e_i X^i$$

où

$$\forall\, i \in [\![0, n+m-1]\!], \qquad e_i = \sum_{j=0}^{k} (j+1) a_{j+1} b_{k-j}$$

Ainsi

$$P'Q + PQ' = \sum_{i=0}^{n+m-1} (d_i + e_i) X^i = \sum_{i=0}^{n+m-1} f_i X^i$$

où, pour $k \in [\![0, n+m-1]\!]$ on a

$$\begin{aligned}
f_k &= d_k + e_k \\
&= \sum_{j=0}^{k} a_j(k-j+1)b_{k-j+1} + \sum_{j=0}^{k}(j+1)a_{j+1}b_{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} a_j(k-j+1)b_{k-j+1} + \sum_{l=1}^{k+1} l a_l b_{k-l+1} \qquad (l = j+1) \\
&= (k+1)a_0 b_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} a_j(k-j+1)b_{k-j+1} + \sum_{j=1}^{k} j a_j b_{k-j+1} + (k+1)a_{k+1}b_0 \\
&= (k+1)a_0 b_{k+1} + (k+1)a_{k+1}b_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j(k-j+1)b_{k-j+1} + j a_j b_{k-j+1} \\
&= (k+1)a_0 b_{k+1} + (k+1)a_{k+1}b_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j(k+1)b_{k-j+1} \\
&= (k+1)\sum_{j=0}^{k+1} a_j b_{k-j+1} \\
&= (k+1)c_{k+1}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$P'Q + PQ' = \sum_{i=0}^{n+m-1} (i+1)c_{i+1}X^i = (PQ)'$$

— La formule de $(P \circ Q)$ se prouve en commençant par le cas $Q = X$, puis le cas $Q = X^m$ avec $m \in \mathbb{N}$ puis en concluant par combinaison linéaire, on l'admettra ici.

— On procède par récurrence :

<u>Initialisation :</u> Si $n = 0$ on a

$$(PQ)^{(0)} = PQ = \binom{0}{0} P^{(0)}Q^{(0)} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} P^{(k)}Q^{(0-k)}$$

<u>Hérédité :</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)}Q^{(n-k)}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
(PQ)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(P^{(k)}Q^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(P^{(k+1)}Q^{(n-k)}+P^{(k)}Q^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(P^{(k+1)}Q^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}P^{(i)}Q^{(n+1-i)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k+1)} \\
&= \binom{n}{n}P^{(n+1)}Q^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}P^{(k)}Q^{(n+1-k)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k+1)}+\binom{n}{0}P^{(0)}Q^{(n+1)} \\
&= P^{(n+1)}Q^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)P^{(k)}Q^{(n+1-k)}+P^{(0)}Q^{(n+1)} \\
&= \binom{n+1}{n+1}P^{(n+1)}Q^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}P^{(k)}Q^{(n+1-k)}+\binom{n+1}{0}P^{(0)}Q^{(n+1)} \\
&= +\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}P^{(k)}Q^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'égalité au rang $n+1$ et achève la récurrence. □

Théorème 20.4: Dérivation et degré

Soit P un polynôme réel non constant. On a alors

$$\deg(P') = \deg(P-1)$$

et, par suite, si $\deg(P) \geqslant k$

$$\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k$$

Démonstration. Le premier point vient simplement de la définition de P' et le second en découle par récurrence. □

20.1.3 Structure de l'ensemble des polynômes (Hors programme)

Propriété 20.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

- *L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel.*
- *L'ensemble des polynômes de degré inférieurs ou égal à n, $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.*

Définition 20.7. Soit $n \in \mathbb{N}$. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la famille $(1, X, X^2, X^3, \ldots, X^n)$, et on a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) =$

20.2 Racines et factorisation

20.2.1 Définitions

Définition 20.8: Racine d'un polynôme

Soit P un polynôme réel et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$.

Définition 20.9: Factorisation par un polynôme

Soit P un polynôme non-constant et soit Q un autre polynôme. On dit que P se factorise par Q s'il existe un troisième polynôme R tel que $P = QR$.

Exemple 20.4. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ donc le polynôme $x \mapsto x^2 - 1$ est factorisable par $x + 1$.

Théorème 20.5: Factorisation et racine

Soit P un polynôme réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.
P se factorise par $x \mapsto x - \lambda$ si et seulement si λ est une racine de P.

Démonstration. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Supposons que P se factorise par $X - a$, il existe alors R tel que $P = (X-a)R$, on a alors $P(a) = (a-a)R(a)$ d'où $P(a) = 0$.

Réciproquement supposons que $P(a) = 0$.

On rappelle la formule de factorisation vue au chapitre 3 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$

$$a^k - b^k = (a-b) \times \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} b^i$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} P(x) - P(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k - \lambda^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(x^k - \lambda^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k (x-\lambda) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} x^i \\ &= (x-\lambda) \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} x^i \end{aligned}$$

Notons $Q_k = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} X^i \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = \sum_{k=1}^{n} a_k Q_k \in \mathbb{R}[X]$.

On a alors

$$P - P(a) = (X-a)Q$$

D'où $P = (X-a)Q$, P se factorise bien par $X - a$. □

Exemple 20.5. On a

- $P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$
- $Q = 6x^3 + x^2 - 19x + 6 = (x+2)(2x-3)(3x-1)$
- $R = x^4 - 6x^2 + 7x - 6 = (x-2)(x+3)(x^2-x+1) = (x-2)(x+3)\left(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

Théorème 20.6

Soit P un polynôme nul et soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ des racines distinctes de P. Alors il existe un polynôme Q tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)Q$$

En particulier on a $k \leqslant \deg(P)$

Démonstration. D'après le théorème précédent, comme $P(\lambda_1) = 0$ alors il existe Q_1 tel que $P = (X-\lambda_1)Q_1$.

On a alors $P(\lambda_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)Q_1(\lambda_2) = 0$. Ainsi λ_2 est une racine de Q_1, on peut donc factoriser Q_1 par $X - \lambda_2$.

On en tire alors Q_2 tel que $Q_1 = (X-\lambda_2)Q_2$, d'où

$$P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)Q_2$$

On répète ce procédé k fois de suite et on trouve Q tel que

$$P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_k)Q$$

On a en particulier

$$\deg(P) = \deg\left((X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_k)\right) + \deg(Q) = k + \deg(Q) \geqslant k$$

$\square$

Théorème 20.7

Soit P un polynôme réel de degré n. Si P s'annule en $n+1$ points distincts alors P est le polynôme nul.

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n et soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ $n+1$ points d'annulation de P.

Alors on ne considère que les n premiers, on peut factoriser P par $(X-\lambda_1)$, $(X-\lambda_2)$, etc, soit

$$P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n)K$$

où K est un polynôme de degré $n - n = 0$ donc une constante.

Alors, en évaluant cette expression en λ_{n+1} on obtient

$$0 = P(\lambda_{n+1}) = K(\lambda_{n+1}-\lambda_1)(\lambda_{n+1}-\lambda_2)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$$

Les $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ sont deux à deux distincts, on a ainsi

$$(\lambda_{n+1}-\lambda_1)(\lambda_{n+1}-\lambda_2)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n) \neq 0$$

D'où $K = 0$ et, par suite

$$P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n)K = 0$$

□

Théorème 20.8
Soit P un polynôme réel de degré n possédant n racines réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Alors P s'écrit sous la forme

$$P : x \mapsto a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$$

où a est le coefficient dominant de P.

20.2.2 Racines multiples

Précisons la définition d'une racine d'un polynôme.

Définition 20.10: Racine multiple

Soit P un polynôme réel et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une racine de P s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et Q un polynôme réel tels que

$$P : x \mapsto (x - \lambda)^m Q(x)$$

avec $Q(\lambda) \neq 0$.
On appelle alors m l'ordre de multiplicité de λ ou simplement la multiplicité de λ.

Remarque 20.3. Si $m = 1$ on parle de racine simple, si $m = 2$ on parle de racine double, si $m = 3$ de racine triple, etc.

Exemple 20.6.
- 4 est racine double du polynôme $x \mapsto (x - 4)^2$ ainsi que du polynôme $x \mapsto (x - 4)^2(x + 2)$
- 1 est racine triple du polynôme $x \mapsto x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$

Corollaire 20.1. *Soit P un polynôme réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
λ est racine multiple de P si et seulement si

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = 0.$$

Corollaire 20.2. *Soit P un polynôme réel de degré impair. Alors P admet au moins une racine réelle.*

Démonstration. Par le TVI. □

Exercice 20.1.
— Factoriser $x \mapsto x^2 - 16$ par $x - 4$
— Factoriser $x \mapsto x^3 - 8$ par $x - 2$
— Factoriser $P : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ par $x - 3$.
— Factoriser $Q : x \mapsto x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 4x - 1$ par $x - 2$ autant de fois que possible.

20.2.3 Existence de racines (hors-programme)

Tout ce qui suit est hors programme en BCPST et peut-être lu à titre culturel.

Existe-t-il toujours des racines à un polynôme ? Il s'agit d'une question qui a intéressé les mathématiciens pendant longtemps à laquelle il a fallu plusieurs siècles pour avoir une réponse complète

Théorème 20.9: de D'Alembert-Gauss

Soit P un polynôme (à coefficients réels ou complexes) (remarquons que $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$). Alors P admet au moins un racine dans $\mathbb{C}$.

Remarque 20.4.
- On appelle aussi parfois ce théorème le théorème fondamental de l'algèbre (bien que la plupart de ses preuves soient analytiques)
- Ce théorème a été énoncé pour la première fois sous cette forme par Jean Le Rond D'Alembert en 1746, Albert Girard en avait eu la première intuition en 1629 mais ne disposait pas des nombres complexes. Il a fallu attendre le 19e siècle pour voir apparaître des preuves complètes, d'abord par Jean Robert Argand en 1814, puis par Gauss en 1815,1816 et 1849.
- Ce résultat est non constructif, il nous assure de l'existence d'une racine mais ne nous donne pas de moyen de la trouver. On connait des méthodes pour les polynômes de degré $1, 2, 3$ (méthode de Cardan) et 4 (méthode de Ferrari) et Niels Abel a prouve qu'il n'existait pas de méthode générale pour les degrés supérieurs ou égaux à 5.

Corollaire 20.3. *Tout polynôme de degré n à coefficients complexes peut s'écrire comme le produit de n polynôme du premier degré.*

Théorème 20.10
Soit P un polynôme (complexe) de degré n. P admet exactement n racines complexes comptées avec multiplicité . On entend par cela qu'une racine de multiplicité m est compté m fois.

Les polynômes réels étant des cas particuliers des polynômes complexes ce résultat s'applique également à eux.

Exemple 20.7. Par exemple $x \mapsto (x-1)^4$ admet 1 comme racine de multiplicité 4, il admet donc 4 racines comptées avec multiplicité.