

TD₂₀ Polynômes

1 Calcul sur l'ensemble des polynômes

Exercice 1

Quel est le degré des polynômes suivants ?

$$P : x \mapsto (x + 2)^6 - (x^2 + 4)^3, \quad Q : x \mapsto (-2 + 3x + x^2)^3 (4x + 5)^2$$

$$P_1 : x \mapsto \prod_{k=0}^n (x - k), \quad P_2 : x \mapsto \prod_{k=1}^n (2^k - x)^k$$

Exercice 2

On considère les deux polynômes :

$$P : x \mapsto (-x + 3)^7 + x^7 + (x^2 + 3)^3, \quad Q : x \mapsto (2(x^3 - 1)(x^2 - 2) - x^4)^3 - 4(X + 5)^9$$

1. Quel est le degré des polynômes P et Q ?
2. Quel est le coefficient dominant des polynômes P et Q ?
3. Quel est le terme constant des polynômes P et Q ?

Exercice 3

On note $P : x \mapsto 1 + x^2$, calculer $P(i)$, $P(-1)$, $P(1 + i)$.

Exercice 4

On note $P : x \mapsto x^2 + \sqrt{2}x + 1$, Exprimer les polynômes suivants sous une forme développée réduite : $P(x - 1)$, $P(-x)$, $P(x^3 - 1)$

2 Factorisation et racines

Exercice 5

1. Soit le polynôme $P : x \mapsto x^3 - x^2 + x - 1$. Montrer que 1 est racine de P et factoriser P par $x - 1$.
2. Soit le polynôme $Q : x \mapsto x^3 - 9x^2 + 26x - 24$. Montrer que 2 est racine de Q et factoriser Q par $x - 2$.

Exercice 6

Factoriser les polynômes suivants

$$x \mapsto x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8, \quad x \mapsto x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$$

3 Identification de polynômes

Exercice 7

Trouver tous les polynômes P réels tels que

$$P(x + 1) = P(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Trouver tous les polynômes P réels tels que

$$P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit P un polynôme réel tel que $P(x) = P(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que tous les monômes de P sont de degré pair.