Chapitre 21

Probabilités 2 : variables aléatoires finies

Sommaire

Lors du chapitre Probabilités 1, nous avons étudié la probabilité d'événements aléatoires. Dans ce chapitre, l'objectif est d'étudier des variables dites aléatoires.

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, Ω désigne un ensemble fini, sur lequel on dispose d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$. On dit que Ω est un espace probabilisé fini.

21.1 Variables aléatoires finies, Loi d'une variable aléatoire, Fonction de répartition

21.1.1 Variables aléatoires finies

Définition 21.1

On appelle variable aléatoire réelle finie toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
L'ensemble $X(\Omega)$ est appelé univers image de la variable aléatoire X. Il s'agit de l'ensemble des valeurs que peut prendre X. Puisque Ω est fini alors $X(\Omega)$ est fini.

Remarque 21.1. Comme pour les fonctions on peut sommer, multiplier, diviser, composer par des fonctions réelles à valeurs réelles, etc, les variables aléatoires réelles.

Exemple 21.1. On lance 3 dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des résultats. On a $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$ et X : $\begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto x_1 + x_2 + x_3 \end{array}$

On a alors $X(\Omega) = [\![3, 18]\!]$

Définition 21.2

- Soit $a \in \mathbb{R}$, l'application X : $\begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto a \end{array}$ est dit être une variable aléatoire constante. Elle vérifie $X(\Omega) = \{a\}$
- Soit $A \subset \Omega$ un événement, on définit l'application $\mathbf{1}_A$ par

$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

  $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire appelée indicatrice de A. Si $A = \Omega$ (resp. $A = \emptyset$) alors $\mathbf{1}_A$ est la variable aléatoire constante égale à 1 (resp. 0). Dans les autres cas on a $\mathbf{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$

Définition 21.3: Notations

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle finie et $A \subset \mathbb{R}$.
On note $(X \in A)$ ou « $X \in A$ »l'événement

$$\{\omega \in \Omega\ ,\ X(\omega) \in A\}$$

On notera alors $\mathbb{P}(X \in A)$ la probabilité de l'événement $(X \in A)$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega\ ,\ X(\omega) \in A\})$$

Par extension, si $a \in \mathbb{R}$, on définit les notations suivantes :
- $(X = a) = \{\omega \in \Omega\ ,\ X(\omega) = a\}$
- $(X \leq a) = \{\omega \in \Omega\ ,\ X(\omega) \leq a\}$
- $(X \geq a) = \{\omega \in \Omega\ ,\ X(\omega) \geq a\}$

Exemple 21.2. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X le résultat du lancer. Alors les événements

Propriété 21.1. *Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. Alors la famille d'événements*

$$(X = a), \quad a \in X(\Omega)$$

forme un système complet d'événements.

Démonstration. Ces événements forment en effet une parition de Ω. □

21.1.2 Loi d'une variable aléatoire finie

Définition 21.4: Loi

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle finie.
L'application

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{l} \mathcal{P}(X(\Omega)) \longrightarrow [0,1] \\ A \longmapsto \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$. On dit que c'est la loi de X.

Remarque 21.2. La loi de X dépend bien évidemment de la probabilité $\mathbb{P}$.

Propriété 21.2

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle finie.
On définit l'application

$$f_X : \begin{array}{l} X(\Omega) \longrightarrow [0,1] \\ a \longmapsto \mathbb{P}(X = a) \end{array}$$

.
La donnée de l'application f_X caractérise entièrement la loi $\mathbb{P}_X$ de X. On dira d'ailleurs parfois que f_X est la loi de X.

Remarque 21.3. En toute généralité il est incorrect de dire que f_X est la loi de X mais dans le cas des variables aléatoires finies la différence est minime. Le programme officiel définit donc la loi de X comme étant la fonction f_X. Il serait plus correct de dire que f_X est la fonction de masse de la loi de X

Propriété 21.3

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle finie et $A \subset X(\Omega)$. Alors

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a) = \sum_{a \in A} f_X(a)$$

Démonstration. Il s'agit d'une simple utilisation de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\{X = a\})_{a \in X(\Omega)}$. □

Exemple 21.3.

1. Je lance un dé et je gagne 1€ si le résultat est $3, 4$ ou 5, 3€ si le résultat est 6 et rien du tout si le résultat est 1 ou 2. Notons alors X la variable aléatoire correspondant à mon gain.
   Ω est l'ensemble $[\![1,6]\!]$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On a alors $X(\Omega) = \{0, 1, 3\}$ et
   $$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{6}$$
2. Aurore et Catherine jettent chacune un dé, celle qui obtient le plus grand score reçoit de l'autre autant d'euros que la différence des résultats des dés. Notons X le gain d'Aurore.
   Ω est l'ensemble $[\![1,6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On a alors $X(\Omega) = [\![-5,5]\!]$ et la loi de X est donnée par

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Dans les problèmes de probabilité Ω n'aura en général pas d'importance et on ne disposera pas de l'expression explicite de X. Tout ce qui nous sera nécessaire est $X(\Omega)$ et la loi de X.

On peut représenter graphiquement la loi f_X de X par un diagramme en bâtons.

Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ alors on va tracer pour chaque x_i un bâton de hauteur $f_X(x_i)$ à l'abscisse x_i.

Remarque 21.4. Il est clair que la somme des hauteur des bâtons est égale à 1.

Exemple 21.4. Aurore et Catherine jettent chacune un dé, celle qui obtient le plus grand score reçoit de l'autre autant d'euros que la différence des résultats des dés. Notons X le gain d'Aurore.

Ω est l'ensemble $[\![1,6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On a alors $X(\Omega) = [\![-5,5]\!]$ et la loi de X est donnée par

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On obtient alors le diagramme en bâtons suivant

On a vu qu'à une variable aléatoire on pouvait associer sa loi et on a dit qu'en pratique seule la loi nous était nécessaire, ceci s'explique en partie par le résultat suivant

Propriété 21.4

Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des réels deux-à-deux distincts. Soit $(p_1, \cdots, p_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ des réels positifs tels que

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

Alors il existe une variable aléatoire X dont la loi est donnée par $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}(X = x_k) = p_k$$

Démonstration. Admise □

21.1.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition 21.5

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle finie.

On définit la fonction F_X : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ t \longmapsto \mathbb{P}(X \leq t) \end{array}$

On appelle F_X la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Exemple 21.5. 1. Je lance un dé et je gagne 1€si le résultat est $3, 4$ ou 5, 3€si le résultat est 6 et rien du tout si le résultat est 1 ou 2. Notons alors X la variable aléatoire correspondant à mon gain.

Ω est l'ensemble $[\![1,6]\!]$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On a alors $X(\Omega)=\{0,1,3\}$ et

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{3},\qquad \mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2},\qquad \mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{6}$$

La fonction de répartition de X est alors

$$F_X : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 0\leq t<1 \\ \frac{5}{6} & \text{si } 1\leq t<3 \\ 1 & \text{si } 3\leq t \end{cases} \end{array}$$

Sa représentation graphique est

2. Aurore et Catherine jettent chacune un dé, celle qui obtient le plus grand score reçoit de l'autre autant d'euros que la différence des résultats des dés. Notons X le gain d'Aurore

   Ω est l'ensemble $[\![1,6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On a alors $X(\Omega)=[\![-5,5]\!]$ et la loi de X est donnée par

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

   La fonction de répartition de X a alors pour représentation graphique

Propriété 21.5

La donnée de F_X est équivalente à la donnée de $\mathbb{P}_X$ ou de f_X.

Comment déterminer F_X à partir de $\mathbb{P}_X$ ou de f_X

Soit X une variable aléatoire réelle finie, soit $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

F_X est une fonction en escalier, continue à droite en tout point et croissante. Elle « saute » en chaque x_k et fait « un saut » de hauteur $f_X(x_k)$.

Plus précisément, pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x_1 \\ \sum_{i=1}^{k} f_X(x_i) & \text{si } x_k \leq t < x_{k+1} \\ 1 & \text{si } t \geq x_n \end{cases}$$

Comment déterminer f_X à partir de F_X

Soit X une variable aléatoire réelle finie dont on connait la fonction de répartition F_X.

Alors $X(\Omega)$ est l'ensemble des points de discontinuité de F_X. Notons $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on a alors

$$f_X(x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$$

(avec, par convention $F_X(x_0) = 0$).

Plus précisément, si $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f_X(x) = \lim_{t \to x^+} F_X(t) - \lim_{t \to x^-} F_X(t)$$

La fonction de répartition va être particulièrement utile pour trouver la loi d'une variable aléatoire exprimée par des conditions faisant intervenir des maximums ou des minimums.

Exemple 21.6. Soit X_1, X_2, X_3 les résultats de trois lancers de dés équilibrés à 6 faces. On suppose les lancers indépendants (dans un sens qui sera précisé plus tard).

Notons $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$ le maximum des trois résultats. On veut déterminer la loi de Z.

Soit $k \in [\![1, 6]\!]$, alors

$$(Z \leq k) = (X_1 \leq k) \cap (X_2 \leq k) \cap (X_3 \leq k)$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq k) &= \mathbb{P}(X_1 \leq k, X_2 \leq k, X_3 \leq k) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq k)\mathbb{P}(X_2 \leq k)\mathbb{P}(X_3 \leq k) \qquad \text{par indépendance de } X_1, X_2 \text{ et } X_3 \\ &= \left(\frac{k}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k-1) = \left(\frac{k}{6}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^3 = \frac{3k^2 - 3k + 1}{216}$$

21.1.4 Image d'une variable aléatoire par une fonction

Propriété 21.6

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle finie.
Soit $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subset D_\varphi$.
On définit la variable aléatoire $Y = \varphi(X)$ par

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \varphi(X(\omega))$$

La loi de Y est alors donnée par $Y(\Omega) = \{\varphi(x)\ ,\ x \in X(\Omega)\} = \varphi(X(\Omega))$ et, pour $y \in Y(\Omega)$

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega),\ \varphi(x) = y} \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple 21.7. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X le résultat. Soit $Y = (X-2)(X-4)$. Déterminons la loi de Y.

On a alors $Y(\Omega) = \{-1, 0, 3, 8\}$et

- $\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{6}$
- $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{3}$
- $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{3}$
- $\mathbb{P}(Y = 8) = \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6}$

21.2 Espérance d'une variable aléatoire, Moments d'une variable aléatoire

21.2.1 Définition de l'espérance

Définition 21.6

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω.
On appelle espérance de X le réel $E(X)$ défini par

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ alors

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Remarque 21.5. L'espérance de X correspond la valeur moyenne de la variable aléatoire X.

Propriété 21.7

Soit X une variable aléatoire réelle constante égale à a. Alors $E(X) = a$
Soit $A \subset \Omega$, alors $E(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$

Démonstration. Cela découle simplement de la définition. □

Exemple 21.8. 1. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X le résultat. La loi de X est alors la probabilité uniforme sur $[\![1,6]\!]$et on a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{6}\frac{6\times 7}{2} = \frac{7}{2}$$

2. Aurore et Catherine jettent chacune un dé, celle qui obtient le plus grand score reçoit de l'autre autant d'euros que la différence des résultats des dés. Notons X le gain d'Aurore
Ω est l'ensemble $[\![1,6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On a alors $X(\Omega) = [\![-5,5]\!]$ et la loi de X est donnée par

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

L'espérance du gain d'Aurore est

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) \\
&= \frac{-5\times 1 + (-4)\times 2 + (-3)\times 3 + (-2)\times 4 + (-1)\times 5 + 0\times 6 + 1\times 5 + 2\times 4 + 3\times 3 + 4\times}{36} \\
&= 0
\end{aligned}$$

En moyenne Aurore ne gagne donc pas d'argent, le jeu est équilibré.

21.2.2 Propriétés de l'espérance

Propriété 21.8: Linéarité de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles finies. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

En particulier si Y est une variable aléatoire constante égale à 1

$$E(\lambda X + \mu) = \lambda E(X) + \mu$$

Démonstration. Admise. □

Définition 21.7

Une variable aléatoire réelle finie X est dite positive si

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad X(\omega) \geq 0$$

ou encore si

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$$

De même, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies définies sur Ω on dira que $X \leq Y$ si

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad X(\omega) \leq Y(\omega)$$

ou encore si

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$$

Propriété 21.9

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles finies définies sur Ω.

— Si X est positive, alors $E(X) \geq 0$ (la réciproque est fausse !)

— Si X est positive et $E(X) = 0$ alors $X = 0$

— Si $X \geq Y$ (i.e. si $\mathbb{P}(X \geq Y) = 1$) alors $E(X) \geq E(Y)$

Démonstration. C'est une simple conséquence de la définition □

Théorème 21.1: Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω.
Soit φ une fonction réelle à valeurs réelles telle que $X(\Omega) \subset D_\varphi$. Alors

$$E(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x)\mathbb{P}(X = x)$$

En particulier si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ alors

$$E(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$$

Remarque 21.6. L'intérêt de ce théorème est de pouvoir calculer l'espérance de $\varphi(X)$ sans avoir à déterminer précisément la loi de $\varphi(X)$.

Exemple 21.9. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X le résultat. Soit $Y = (X - 2)(X - 4)$. Déterminons l'espérance de Y.

D'après le théorème de transfert on a

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E((X-2)(X-4)) \\
&= \sum_{k=1}^{6}(k-2)(k-4)\mathbb{P}(X=k) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 - 6k + 8 \\
&= \frac{1}{6}\Big(\frac{6\times 7\times 13}{6} - 6\frac{6\times 7}{2} + 48\Big) \\
&= \frac{1}{6}(91 - 126 + 48) \\
&= \frac{13}{6}
\end{aligned}$$

21.2.3 Moments, Variance, Écart-type

Définition 21.8: Moment d'ordre k

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω.
On appelle moment d'ordre k de X le réel

$$E(X^k) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^k \, \mathbb{P}(X=x)$$

Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ alors

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \, \mathbb{P}(X=x_i)$$

Remarque 21.7. Ainsi, l'espérance d'une variable aléatoire X est son moment d'ordre

Définition 21.9: Variance

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω.
On définit la variance de X par

$$V(X) = E((X-E(X))^2)$$

La variance de X représente l'écart quadratique moyen entre X et son espérance et mesure la dispersion de X autour de son espérance.

Définition 21.10: Écart-type

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω.
On a $V(X) \geq 0$. On définit alors l'écart-type de X par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque 21.8. Comme la variance, l'écart-type mesure la dispersion de X mais son intérêt est d'être homogène à X et du même ordre de grandeur et ainsi de pouvoir facilement être interprétée.

Propriété 21.10: Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω. On a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

□

Propriété 21.11

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω. On a alors $V(X) = 0$ si et seulement si X est une variable aléatoire constante.

Démonstration. Supposons d'abord que X est une variable aléatoire constante égale à a. Alors $E(X) = a$ et $X - E(X) = 0$, d'où $E((X - E(X))^2) = 0$, c'est-à-dire $V(X) = 0$. Réciproquement, supposons que $V(X) = 0$, i.e. $E((X - E(X))^2) = 0$.

Alors $(X - E(X))^2$ est une variable aléatoire positive d'espérance nulle, elle est donc nulle, c'est-à-dire $X = E(X)$.

X est ainsi bien une variable aléatoire constante. □

Définition 21.11

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω. On dit que

- X est centrée si $E(X) = 0$
- X est centrée réduite si $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$

Par une transformation affine on pourra toujours si besoin se ramener à une variable aléatoire centrée réduite.

Propriété 21.12

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω. On a

$$V(\lambda X + \mu) = \lambda^2 V(X)$$

$$\sigma(\lambda X + \mu) = |\lambda| \sigma(X)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} V(\lambda X + \mu) &= E(((\lambda X + \mu) - E(\lambda X + \mu))^2) \\ &= E((\lambda X + \mu - \lambda E(X) - \mu)^2) \\ &= E(\lambda^2 (X - E(X))^2) \\ &= \lambda^2 E((X - E(X)^2) \\ &= \lambda^2 V(X). \end{aligned}$$

Par suite

$$\sigma(\lambda X + \mu) = \sqrt{V(\lambda X + \mu)} = \sqrt{\lambda^2 V(X)} = |\lambda| \sigma(X).$$

□

Corollaire 21.1. *Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω.*

Alors $X - E(X)$ est une variable aléatoire centrée et, si X n'est pas constante, $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

Démonstration. □

21.3 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 21.12

Soit X et Y deux variables aléatoires finies définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
On dit que X et Y sont indépendantes si

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \forall y \in Y(\Omega), \qquad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Exemple 21.10. On lance deux dés équilibrés indépendamment l'un de l'autre, on note X la variable aléatoire donnant le résultat du premier dé et Y la variable aléatoire donnant le résultat du second.

Les lancers étant indépendants, on a l'intuition que les variables aléatoires X et Y le sont également.

Remarque 21.9. En pratique l'indépendance est souvent une hypothèse issue de la modélisation du problème

Théorème 21.2

Soit X et Y deux variables aléatoires finies définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
Alors X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \qquad \text{les événements } X \in A \text{ et } Y \in B \text{ sont indépendants.}$$

Théorème 21.3

Soit X et Y deux variables aléatoires finies définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit u et v deux fonctions réelles de la variable réelle.
On suppose que X et Y sont indépendantes, alors $u(X)$ et $v(Y)$ sont indépendantes.

Théorème 21.4

Soit X et Y deux variables aléatoires finies définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit u et v deux fonctions réelles de la variable réelle.
On suppose que X et Y sont indépendantes, alors

$$E(u(X)v(Y)) = E(u(X))E(v(Y))$$

En particulier

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

21.4 Lois de probabilités usuelles

21.4.1 Loi certaine

Définition 21.13

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω. Soit $a \in \mathbb{R}$
On dit que X suit la loi certaine égale à a si $X(\Omega) = \{a\}$ et

$$\mathbb{P}(X = a) = 1.$$

Propriété 21.13: Espérance, variance de la loi certaine

Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle de loi certaine égale à a définie sur Ω. Alors

$$E(X) = a \quad \text{et} \quad V(X) = 0.$$

Démonstration. Cela découle de la définition. □

Propriété 21.14: Fonction de répartition de la loi certaine

Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle de loi certaine égale à a définie Ω. Alors la fonction de répartition de X est

$$F_X : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases} \end{array}$$

21.4.2 Loi de Bernoulli

Définition 21.14

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω. Soit $p \in [0,1]$
On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$ ou bien $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$.

Représentation de la loi de Bernouilli $\mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)$

Propriété 21.15: Espérance, variance de la loi de Bernoulli

Soit $p \in [0,1]$ et X une variable aléatoire réelle de loi de Bernoulli de paramètre p définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

Démonstration. On a

$$E(X) = 1 \times \mathbb{P}(X=1) + 0 \times \mathbb{P}(X=0) = p$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1^2 \times \mathbb{P}(X=1) + 0^2 \times \mathbb{P}(X=0) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

□

Propriété 21.16: Fonction de répartition de la loi de Bernoulli

Soit $p \in [0,1]$ et X une variable aléatoire réelle de loi de Bernoulli de paramètre p définie sur Ω. Alors la fonction de répartition de X est

$$F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1-p & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases} \end{array}$$

Fonction de répartition de la loi de Bernouilli $\mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)$

21.4.3 Loi uniforme sur un ensemble fini

Définition 21.15

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω et soit $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un ensemble fini. On dit que X suit la loi uniforme sur E si $X(\Omega) = E$ et

$$\forall x \in E, \qquad \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\text{card}(E)}$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}(E)$ ou bien $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(E)$.

Représentation de la loi uniforme sur $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{3}{2}\right\}$

Remarque 21.10. Très souvent on travaille avec des lois uniformes sur des intervalles d'entiers $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ou $\mathcal{U}(\llbracket m, n \rrbracket)$ avec $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$

Propriété 21.17: Espérance, variance de la loi uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ définie sur Ω, alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Plus généralement, si X suit la loi uniforme sur $\llbracket m, n \rrbracket$ avec $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ alors

$$E(X) = \frac{m+n}{2} \qquad V(X) = \frac{(n-m+1)^2-1}{12}$$

Démonstration. Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k) - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{12} \\
&= \frac{n^2-1}{12}
\end{aligned}$$

Soit Y une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[\![m, n]\!]$, alors $Y - m + 1$ suit une loi uniforme sur $[\![1, n - m + 1]\!]$, d'où

$$E(Y) = E(Y - m + 1 + m - 1) = E(Y - m + 1) + m - 1 = \frac{n - m + 2}{2} + m - 1 = \frac{n + m}{2}$$

$$V(y) = V(Y - m + 1 + m - 1) = V(Y - m + 1) = \frac{(n - m + 1)^2 - 1}{12}$$

□

21.4.4 Loi binomiale

Définition 21.16

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur Ω et soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \qquad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ ou bien $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$

Remarque 21.11. — La loi binomiale $\mathcal{B}(1, p)$ correspond à la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

— On a alors bien $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ puisque, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$$

— Comment interpréter la loi binomiale ? On répète de manière indépendante n expériences de Bernoulli de paramètres p (i.e. succès avec probabilité p, échec avec probabilité $1 - p$. Si X est le nombre d'issues favorables obtenues (le nombre de succès) alors X suit une loi binomiale de paramètre n et p.

Propriété 21.18: Espérance et variance de la loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p. Alors

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p).$$

Démonstration. — Par définition, on a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Pour calculer cette somme, le plus simple est d'utiliser la formule du binôme de Newton, et de dériver :

$$(x + (1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times x^k \times (1-p)^{n-k}$$

D'où

$$n \times (x + (1-p))^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k} \times x^{k-1} \times (1-p)^{n-k}$$

En prenant $x = p$, on obtient :

$$n = \sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k} \times p^{k-1} \times (1-p)^{n-k}$$

D'où le résultat.

— Pour la variance, on a :

$$V(X) = \mathcal{E}\left(X^2\right) - E(X)^2 = \mathcal{E}\left(X \times (X-1)\right) + E(X) - E(X)^2$$

En re-dérivant l'expression précédente, on a :

$$n \times (n-1) \times (x + (1-p))^{n-2} = \sum_{\hat{\text{I}}=2}^{n} k \times (k-1) \times \binom{n}{p} \times x^{k-2} \times (1-p)^{n-k}$$

D'où, en prenant $x = p$:

$$E(X \times (X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k \times (k-1) \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = p^2 \times n \times (n-1)$$

Finalement :

$$V(X) = n \times (n-1) \times p^2 - n^2 \times p^2 + n \times p = n \times p \times (1-p)$$

$\square$