

TD₂₁ Variables aléatoires finies

1 Calcul d'une loi de probabilité

Exercice 1

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$. On pose $Y = 2X^2 + 3$. Déterminer l'espérance et la variance de X ; l'espérance et la variance de Y , et enfin la loi de Y .
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$). Calculer l'espérance et la variance de $Y = 2^X$.

Exercice 2

On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numéro k soit proportionnelle à k , on note p le coefficient de proportionnalité. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la face du dé obtenue.

1. Déterminer p et donner la loi de X .
2. Donner la fonction de répartition de X .
3. Calculer $E(X)$.
4. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Calculer $E(Y)$.

Exercice 3

Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0, 1[$. On pose également $q = 1 - p$.

On définit la variable aléatoire X par :

- $X = k$ si le k ième candidat réussit le test,
- $X = n + 1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X , et vérifier vos calculs (qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité).
2. En dérivant la formule donnant $\sum_{k=0}^n x^k$, calculer $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$.
3. En déduire l'espérance de X
4. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Exercice 4

Pour allumer un feu, on dispose de n allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette donnée est $p \in]0, 1[$.

1. On note A l'événement "le feu est allumé" ; déterminer $P(A)$.
2. Quelle est la probabilité que le feu soit allumé et qu'il reste k allumettes, $0 \leq k \leq n - 1$.

2 Lois usuelles à reconnaître

Exercice 5

Un QCM est composé de n questions. Pour chaque question, il est proposé quatre réponses dont une seule est juste. Répondre correctement à une question rapporte 3 points et répondre faux enlève 1 point. Un candidat répond au hasard à toutes les questions. On note X le nombre de réponses correctes et S le nombre de points obtenus.

1. Déterminer la loi de X . Donner son espérance et sa variance.
2. Exprimer S en fonction de X . En déduire l'espérance et la variance de S .
3. On suppose que $n = 5$ et que la note N du candidat est égale à S si $S > 0$, elle est égale à 0 sinon. Quelle est l'espérance de N ?

Exercice 6

L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées.

On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la bonne réponse est p . On note, pour $1 \leq i \leq 40$, l'événement A_i = "le candidat donne la bonne réponse à la i ème question".

On note S la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

1. Calculer $P(A_i)$.
2. Déterminer la loi de S .
3. A quelle condition sur p le candidat donnera en moyenne au moins 36 bonnes réponses ?

Exercice 7

On se propose d'analyser le sang de N individus pour y déceler l'éventuelle présence d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p , indépendamment des autres.

On dispose pour cela de deux protocoles :

— Protocole 1 : on analyse le sang de chacun des N individus.

— Protocole 2 :

On regroupe les individus par groupe de n (on suppose N divisible par n). On rassemble la collecte de sang des individus d'un même groupe et on teste l'échantillon. Si le résultat est positif, on analyse alors le sang de chacun des individus du groupe.

1. Préciser la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupes positifs.
2. Soit Y la variable aléatoire déterminant le nombre d'analyses effectuées dans le deuxième protocole. Exprimer $E(Y)$ en fonction de n , N et p .
3. Comparer les deux protocoles pour les valeurs $N = 1\,000$, $n = 10$ et $p = 0,01$.

Exercice 8

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ de gauche à droite. Une puce part de la case numéro 0 et se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Les déplacements successifs de la puce sont indépendants.

Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de X_1 , son espérance et sa variance.

2. Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de Y_n , son espérance et sa variance.
3. Calculer X_n en fonction de Y_n . En déduire la loi de X_n et son espérance.

Exercice 9

On dispose d'une pièce et d'un pion placé à l'origine d'un axe gradué. On lance n fois la pièce. A chaque lancer, on déplace le pion d'une unité vers la gauche si on obtient pile, d'une unité vers la droite si on obtient face.

On note X_n l'abscisse du pion à la fin de l'expérience, D_n la distance du pion à l'origine de l'axe et F_n le nombre de fois où la pièce est tombée du côté face.

1. Exprimer D_n en fonction de X_n , et X_n en fonction de F_n .
2. Déterminer la loi de F_n .
3. Calculer l'espérance et la variance de X_n .
4. Comparer la variance de D_n et celle de X_n .
5. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de D_4 .

Exercice 10

Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant

- ou bien une seule marche, avec probabilité p ;
- ou bien deux marches, avec la probabilité $1 - p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres. On observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et Y_n le nombre de marches franchies. Quelle est la loi de X_n ?

Exprimer Y_n en fonction de X_n . En déduire l'espérance et la variance de Y_n .

3 Fonction de répartition et loi d'un min/max

Exercice 11

On tire avec remise cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10. On note X la variable aléatoire égale au maximum des cinq numéros obtenus et Y la variable aléatoire égale au minimum des cinq numéros obtenus.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Calculer $P(X \leq k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et $P(Y \geq k)$ pour $k \in Y(\Omega)$.
En déduire les lois de X et Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 12

Soit N un entier supérieur à 10. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne et on note Y la v. a égale au plus grand nombre tiré.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Combien y a-t-il de poignées telles que $(Y \leq k)$? En déduire $P(Y \leq k)$.
4. Déterminer la loi de Y .

Exercice 13

n candidats n'ont pas soigné la présentation de leur copie. Le correcteur, plutôt que de chercher à lire de tels brouillons, décide de noter au hasard et indépendamment les unes des autres les n copies en accordant une égale probabilité à toutes les notes entières possibles de 0 à 20. On note X_n la variable aléatoire égale à la meilleure note du groupe.

1. Pour $k \in \llbracket 0, 20 \rrbracket$, calculer $P(X_n \leq k)$ et en déduire $P(X_n = k)$. Déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$, interpréter.

2. Montrer que : $E(X_n) = 20 - \sum_{k=0}^{19} \left(\frac{k+1}{21}\right)^n$, et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.