Chapitre 22

Applications linéaires

Sommaire

22.1 Définitions et premières propriétés . . . 1
22.2 Opérations usuelles . . . 3
22.2.1 Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ . . . 3
22.2.2 Composition et isomorphismes . . . 4
22.3 Applications linéaires et espaces vectoriels . . . 5
22.3.1 Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire . . . 5
22.3.2 Noyau et image d'une application linéaire . . . 6
22.3.3 Le théorème du rang et ses conséquences . . . 9
22.4 Représentation matricielle . . . 10
22.4.1 Application linéaire et base . . . 10
22.4.2 Matrice d'une application linéaire . . . 11
22.4.3 Noyau et image d'une matrice . . . 16
22.4.4 Rang d'une application linéaire . . . 17

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et sauf mention contraire, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

22.1 Définitions et premières propriétés

Définition 22.1: Application linéaire

On dit qu'une application φ de E dans F est une **application linéaire** si :

- $$\forall\,(x, y) \in E^2, \qquad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$
- $$\forall\,\lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall\,x \in E, \qquad \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Définition 22.2 (Endomorphisme)**.** On appelle **endomorphisme** d'un espace vectoriel E une application linéaire de E dans E.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Propriété 22.1

Soit φ une application de E dans F. On a alors $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in E^2, \qquad \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y).$$

Démonstration. C'est une conséquence simple de la définition. □

Propriété 22.2. *Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a*

- $\varphi(0_E) = 0_F$.
- *Pour $x \in E$, on a $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.*
- *Pour $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a*

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi(x_k).$$

Démonstration. — Soit $x \in E$, on a

$$\varphi(0_E) = \varphi(0x) = 0\varphi(x) = 0_F$$

— Soit $x \in E$, on a

$$\varphi(-x) = \varphi(-1 \cdot x) = -1 \cdot \varphi(x) = -\varphi(x)$$

— On procède par récurrence sur n.
La propriété est vraie au rang 1 et 2 par définition.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que la propriété est vraie au rang n.
Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$, on a alors

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&= \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) + \lambda_{n+1} \varphi(x_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi(x_k) + \lambda_{n+1} \varphi(x_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \varphi(x_k)
\end{aligned}$$

□

Méthode 22.1: Comment montrer qu'une application φ est linéaire ?

— On se donne deux éléments x et y <u>quelconques</u> et deux scalaires <u>quelconques</u> λ et μ.

— On détermine alors $\varphi(\lambda x + \mu y)$ et $\lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$ et on montre que ces deux quantités sont égales.

Pour montrer que φ est un endomorphisme il faut montrer que φ est linéaire et que $\varphi(E) \subset E$.

Exemple 22.1. Soit E et F deux espaces vectoriels, les applications suivantes sont linéaires

— $\varphi_1 : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto 0_F \end{array}$

— $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array}$

— $\varphi_2 : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \lambda x \end{array}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$

— $\varphi_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \longmapsto (3x+2y, 2z-x) \end{array}$

— $\varphi_4 : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A \longmapsto {}^t A \end{array}$

Remarque 22.1. En première année on se limitera à des applications de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$.

22.2 Opérations usuelles

22.2.1 Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$

Propriété 22.3: $\mathcal{L}(E,F)$ est stable par combinaison linéaire

Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, ainsi que $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. L'application $\lambda f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{array}$ est une application linéaire.
2. L'application $f+g : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x)+g(x) \end{array}$ est une application linéaire.

Démonstration. C'est une simple conséquence de la définition mais une démonstration instructive. □

Propriété 22.4: $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel

Muni de la multiplication par un scalaire et de l'addition définies ci-dessus, $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de E dans F.
En particulier, $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

22.2.2 Composition et isomorphismes

Propriété 22.5: Composée d'applications linéaires

Soit E, F et G trois espaces vectoriels. Soient f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.
Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Démonstration. Soit $(x,y) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda x + \mu y) &= g\left(f(\lambda x + \mu y)\right) \\ &= g\left(\lambda f(x) + \mu f(y)\right) \\ &= \lambda g(\varphi(x)) + \mu g(f(y)) \\ &= \lambda (g \circ f)(x) + \mu (g \circ f)(y) \end{aligned}$$

$g \circ f$ est donc bien une application linéaire. □

Définition 22.3. (Puissances d'une application linéaire) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit φ^n par

$$\begin{cases} \varphi^0 = \mathrm{Id}_E \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n = \varphi^n \circ \varphi \end{cases}$$

On a ainsi

$$\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}$$

D'après la propriété précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n \in \mathcal{L}(E)$.

Propriété 22.6: Application linéaire bijective

Soit φ une application linéaire de E dans F. On suppose que φ est bijective.
Alors son application réciproque φ^{-1} est une application linéaire de F dans E. On dit que φ est un **isomorphisme** de E dans F.

Démonstration. Soit $(y_1,y_2) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(x_1,x_2) \in E^2$ tels que

$$\varphi(x_1) = y_1, \qquad \text{et} \qquad \varphi(x_2) = y_2$$

On a alors

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}\left(\lambda y_1 + \mu y_2\right) &= \varphi^{-1}\left(\lambda \varphi(x_1) + \mu \varphi(x_2)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2)\right) \\ &= \lambda x_1 + \mu x_2 \\ &= \lambda \varphi^{-1}(y_1) + \mu \varphi^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ □

Remarque 22.2. S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes.

Définition 22.4. On appelle automorphismes de E les isomorphismes de E dans E et on note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Exercice 22.1. Montrer que

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x+y, x-y) \end{array}$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même) et exprimer son application réciproque f^{-1}.

Propriété 22.7

Soit E, F et G trois espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
On suppose que f et g sont inversibles. Alors $g \circ f$ est inversible et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. Il s'agit d'un résultat déjà vu dans le chapitre« Applications » □

22.3 Applications linéaires et espaces vectoriels

22.3.1 Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

Propriété 22.8. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire et E' un sous-espace vectoriel de E. Alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Remarque 22.3. On rappelle la définition :

$$f(E') = \{f(u) \mid u \in E'\}.$$

Propriété 22.9. *Soient $u_1, u_2, \dots, u_n \in E$ et f une application linéaire de E dans F. Alors*

$$f(\textit{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)) = \textit{Vect}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)).$$

Exemple 22.2.

- Soit $f: \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto 0_F \end{array}$.

  Alors si A est un sous-espace vectoriel de E, $f(A) =$
- Soit $g: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \longmapsto (x-y, 2x+y, 3x+3y) \end{array}$ et $E' = \{(x, 2x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

  Alors $E' =$

  donc $f(E') =$

22.3.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 22.5: Noyau, image

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.

— On appelle noyau de φ et on note $\text{Ker}(\varphi)$ l'ensemble

$$\text{Ker}(\varphi) = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0_F\}$$

— On appelle image de φ et on note $\text{Im}\,(\varphi)$ l'ensemble

$$\begin{aligned}\text{Im}\,(\varphi) &= \{\varphi(x) \mid x \in E\}\\ &= \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = \varphi(x)\}.\end{aligned}$$

Remarque 22.4. Ker vient du mot anglais « kernel » qui signifie « noyau ».

Représentation schématique

Exemple 22.3. Soit f : $\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x, y) & \longmapsto & (x, 0)\end{array}$.

Propriété 22.10: Le noyau et l'image sont des sous-espaces vectoriels

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.

- $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\text{Im}\,(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. • Pour montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E, on va montrer qu'il

— contient 0_E

— est stable par l'addition de E.

— est stable pour le produit externe.

— On a montré précédemment que $\varphi(0_E) = 0_F$, c'est-à-dire $0_E \in \text{Ker}(\varphi)$.

— Soit $(u, v) \in \text{Ker}(\varphi)$, montrons qu'alors $u + v \in \text{Ker}(\varphi)$.
On a donc $\varphi(u) = 0_F$ et $\varphi(v) = 0_F$.
Alors
$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) = 0_F + 0_F = 0_F$$
On a ainsi bien $u + v \in \text{Ker}(\varphi)$

— Soit $u \in \text{Ker}(\varphi)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors
$$\varphi(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot \varphi(u) = \lambda \cdot 0_F = 0_F$$
Ainsi $\lambda \cdot u \in \text{Ker}(\varphi)$

- Pour montrer que Im (φ) est un sous-espace vectoriel de F, on va montrer qu'il

— contient 0_F

— est stable par l'addition de F.

— est stable pour le produit externe.

— On a montré précédemment que $\varphi(0_E) = 0_F$, ainsi $0_F \in \text{Im }(\varphi)$.

— Soit $(u, v) \in \text{Im }(\varphi)$, montrons qu'alors $u + v \in \text{Im }(\varphi)$.
Soit $x \in E$ tel que $\varphi(x) = u$ et $y \in E$ tel que $\varphi(y) = v$.
Alors
$$u + v = \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \in \text{Im }(\varphi)$$
On a ainsi bien $u + v \in \text{Im }(\varphi)$

— Soit $u \in \text{Im }(\varphi)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors
$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot \varphi(x) = \varphi(\lambda \cdot x) \in \text{Im }(\varphi)$$
Ainsi $\lambda \cdot u \in \text{Im }(\varphi)$

Finalement Im (φ) est bien un sous-espace vectoriel de E.

□

Méthode 22.2: Déterminer le noyau d'une application linéaire f

On écrit ceci :
Soit $u \in E$. Alors $u \in \text{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = 0_F \Leftrightarrow \dots$.
On résout alors $f(u) = 0_F$ et en pratique cela revient souvent à résoudre un système linéaire homogène.

Exercice 22.2 (Déterminer une base et la dimension du noyau d'une application linéaire). Soit

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) \longmapsto (x-y+3z+t, x+2y-z) \end{array}$$

Montrer que φ est une application linéaire, et déterminer une base ainsi que la dimension de son noyau.

Théorème 22.1: Injectivité, surjectivité et bijectivité d'une application linéaire

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de E dans F.

- φ est injective sur E si et seulement si Ker$(\varphi) = \{0_E\}$,
- φ est surjective dans F si et seulement si Im $(\varphi) = F$,
- φ est bijective de E dans F si et seulement si Ker$(\varphi) = \{0_E\}$ et Im $(\varphi) = F$.

Démonstration.

- Supposons que φ est injective, c'est-à-dire

$$\forall (u,v) \in E^2 \qquad \varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow u = v$$

Soit $u \in$ Ker(φ). On a alors $\varphi(u) = \varphi(0_E)$. D'où , par injectivité de φ, $u = 0_E$. Ainsi, si φ est injective alors Ker$(\varphi) = \{0_E\}$. Réciproquement, supposons que Ker$(\varphi) = \{0_E\}$. Montrons que φ est injective. Soit $(u,v) \in E^2$ tel que $\varphi(u) = \varphi(v)$. On a alors, d'après la question précédente $u - v \in$ Ker(φ). Comme Ker$(\varphi) = \{0_E\}$, ceci implique que $u - v = 0_E$, c'est-à-dire $u = v$. On a donc prouvé que

$$\forall (u,v) \in E^2 \qquad \varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow u = v$$

C'est-à-dire que φ est injective. Finalement, on obtient bien que φ est injective si et seulement si Ker$(\varphi) = \{0_E\}$.

- Pour la surjectivité il s'agit simplement de la définition de la surjectivité.
- φ est bijective si et seulement si φ est injective et surjective donc si et seulement si Ker$(\varphi) = \{0_E\}$ et Im $(\varphi) = F$.

□

Remarque 22.5. Le premier point du théorème ci-dessus simplifie grandement l'étude de l'injectivité d'une aplication linéaire f : il suffit de montrer que son noyau est réduit au vecteur nul, *i.e.* Ker$f = \{0_E\}$.

Méthode 22.3: Montrer qu'une application linéaire f est injective

On montre que Ker$f = \{0_E\}$.

Exercice 22.3. Montrer que l'application

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x, x+y) \end{array}$$

est injective.

22.3.3 Le théorème du rang et ses conséquences

Théorème 22.2: Théorème du rang

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors
$$\dim(E) = \dim \mathrm{Im}\ (\varphi) + \dim \mathrm{Ker}(\varphi)$$

Représentation schématique

Exercice 22.4. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2x) \end{array}.$$

Déterminer une base et la dimension de Ker$f$, puis une base de Im f, puis dire si f est injective, surjective, bijective.

Propriété 22.11

On suppose que E et F ont même dimension : $\dim E = \dim F$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- φ est bijective,
- φ est injective ,
- φ est surjective.

Remarque 22.6. En particulier, pour montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est bijective on montrera souvent que φ est injective autrement dit que Ker$(\varphi) = \{0_E\}$ (cf la remarque 22.5).

Démonstration. Il est clair que si φ est bijective alors φ est injective et surjective. Supposons que φ est injective, on a alors Ker$(\varphi) = \{0_E\}$, d'où $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 0$. D'après la théorème du rang on a ainsi $\dim(E) = \mathrm{rg}\varphi))$. On a alors Im $(\varphi) \subset F$ et $\dim(\mathrm{Im}\ (\varphi)) = \dim(F)$, d'où Im $(\varphi) = F$ φ est ainsi surjective et donc bijective. Supposons maintenant que φ est surjective, c'est-à-dire Im $(\varphi) = F$, en particulier $\dim(\mathrm{Im}\ (\varphi)) = \dim(F) = \dim(E)$. D'après le théorème du rang on a alors $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 0$ d'où Ker$(\varphi) = \{0_E\}$ φ est ainsi injective et donc bijective. □

Corollaire 22.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un espace vectoriel de dimension p.*

- *S'il existe une application linéaire injective de E dans F alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.*

- *S'il existe une application linéaire surjective de E dans F alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.*

Par contraposée, on en déduit le corollaire qui suit.

Corollaire 22.2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Alors*

- *Si $\dim F < \dim E$, alors f n'est pas injective.*
- *Si $\dim E < \dim F$, alors f n'est pas surjective.*

Théorème 22.3
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme de E dans F (une application linéaire bijective). Alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Méthode 22.4: Montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est bijective

Différentes approches sont possibles.

1. Si l'expression de la bijection réciproque est demandée, on écrit :
   Soit $v \in F$ et $u \in E$. Alors $v = f(u) \Leftrightarrow \ldots u = f^{-1}(v)$.
2. Si on sait que $\dim(E) = \dim(F)$, on montre que f est injective (c'est en général le plus simple), et on conclut que f est bijective d'après le théorème du rang.
3. Si on sait que $\dim(E) = \dim(F)$, on montre que f est surjective (c'est en général le plus simple), et on conclut que f est bijective d'après le théorème du rang.

Exercice 22.5. Montrer que l'application

$$h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y - z, 2x + y - z, 3x + 3y + 2z) \end{array}$$

est bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

22.4 Représentation matricielle

22.4.1 Application linéaire et base

Propriété 22.12: Deux applications linéaires égales sur une base de E sont égales partout

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, φ et $\psi \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires.
On a $\varphi = \psi$ si et seulement si

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \qquad \varphi(e_i) = \psi(e_i)$$

Remarque 22.7. Pour montrer que deux applications linéaires sont égales il suffit de montrer qu'elles sont égales sur une base.

Démonstration. Il est clair que si $\varphi = \psi$ alors

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \qquad \varphi(e_i) = \psi(e_i)$$

Réciproquement supposons que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \qquad \varphi(e_i) = \psi(e_i)$$

Soit $x \in E$, comme $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

Alors

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \psi(e_k) = \psi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \psi(x)$$

Ainsi $\varphi(x) = \psi(x)$. □

Remarque 22.8. Cette proposition signifie qu'une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base. On peut donc définir une application linéaire de E dans F en se donnant une base de E et l'image de cette base par l'application linéaire.

Exemple 22.4. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, -1, 5, 1)$ et $w = (2, 0, 2, -2)$, il existe alors une unique application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\varphi(e_1) = u, \qquad \varphi(e_2) = v, \qquad \varphi(e_3) = w$$

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$ d'où

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) + z\varphi(e_3) \\ &= xu + yv + zw \\ & (x + y + 2z, 2x - y, 3x + 5y + 2z, 4x + y - 2z) \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y + 2z, 2x - y, 3x + 5y + 2z, 4x + y - 2z) \end{array}$$

22.4.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 22.6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_p)$ une base de F.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit $(y_1, \cdots, y_n) \in F^n$ par

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \qquad y_k = \varphi(e_k)$$

Comme la famille $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_p)$ est une base de F on peut décomposer les vecteurs $(y_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$$y_1 = \lambda_{1,1} f_1 + \lambda_{2,1} f_2 + \cdots + \lambda_{p,1} e_p$$

$$y_2 = \lambda_{1,2} f_1 + \lambda_{2,2} f_2 + \cdots + \lambda_{p,2} e_p$$

etc

$$y_n = \lambda_{1,n} f_1 + \lambda_{2,n} f_2 + \cdots + \lambda_{p,n} e_p$$

On définit alors la matrice de φ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p,1} & \lambda_{p,2} & \cdots & \lambda_{p,n} \end{pmatrix}$$

Remarque 22.9.

- La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$ dépend fortement du choix de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, si on prend d'autres bases on obtient une autre matrice.
- En général si φ est un endomorphisme (l'espace de départ E et d'arrivée F sont les mêmes), on choisit la même base $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, et on écrit dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ pour alléger les notations.
- En première année on se limitera la plupart du temps à $E = \mathbb{K}^n$ et $F = \mathbb{K}^p$ munis de leurs bases canoniques.

Méthode 22.5: Construire la matrice associée à une application linéaire dans deux bases

On se donne $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F, ainsi qu'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.
On cherche à construire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$ de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On écrit en colonne les coordonnées des vecteurs $\varphi(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$, ce qui nous donne la forme suivante.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p,1} & \lambda_{p,2} & \cdots & \lambda_{p,n} \end{pmatrix}$$

Exemple 22.5.

- Donner la matrice de l'application nulle dans deux bases quelconques de E et F.
- Donner la matrice de l'application identité dans une base quelconque de E.
- Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

  Soit
  $$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y + 2z, 2x - y, 3x + 5y + 2z, 4x + y - 2z) \end{array}$$
  φ est linéaire et on a
  $$\varphi(e_1) = (1, 2, 3, 4) = f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4, \qquad \varphi(e_2) = (1, -1, 5, 1) = f_1 - f_2 + 5f_3 + f_4$$
  et
  $$\varphi(e_3) = (2, 0, 2, -2) = 2f_1 + 2f_3 - 2f_4.$$
  D'où
  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple 22.6. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto (x+2y+z, x-y-z, 3x+3y+z) \end{array}.$$

Alors la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vient de voir qu'étant données une base de E et une base de F on peut associer une matrice à toute application linéaire de E dans F. Réciproquement, étant données une base de E et une base de F, à une matrice on peut associer une unique application linéaire

Propriété 22.13: Application linéaire associée à une matrice dans deux bases

On suppose que E un espace vectoriel de dimension n et F un espace vectoriel de dimension p.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Il existe alors une unique application linéaire φ de E dans F tel que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$.
En particulier en prenant $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^p$ muni de leurs bases canoniques C_n et C_p alors il existe une unique application linéaire $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que $M = \mathrm{Mat}_{C_n,C_p}(\phi)$. On appelle cette application linéaire l'application canoniquement associée à M.

Exemple 22.7. Soit $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathbb{R}^5$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Il existe alors une unique application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$

Plus précisément, on a

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (x,y,z,t) \longmapsto (x+2y-2z+4t, 4y+4z+t, x+y+z+2t, -x-2y-3z-4t, x+2t) \end{array}$$

Théorème 22.4

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_p)$ une base de F.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_{p,1} & \lambda_{p,2} & \cdots & \lambda_{p,n} \end{pmatrix}$$

Soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. On a donc

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

D'où

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{j=1}^{p} \lambda_{j,k} f_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k}\alpha_k\right) f_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (MX)_{j,1} f_j \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi(x)) = \begin{pmatrix} (MX)_{1,1} \\ \vdots \\ (MX)_{n,1} \end{pmatrix} = MX = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

□

Les opérations usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire sur les matrices correspondent aux mêmes opérations pour les applications linéaires.

Propriété 22.14: Matrice de l'addition de deux applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soit $(\varphi,\psi) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a alors

$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda\varphi) = \lambda \mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$$

$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi+\psi) = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) + \mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\psi)$$

Démonstration. Cela découle aisément de la définition □

La multiplication matricielle correspond, elle, à la composition des applications linéaires.

Propriété 22.15: Matrice de la composée de deux applications linéaires

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\zeta \in \mathcal{L}(F, G)$, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(\zeta \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\zeta)\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$$

Démonstration. Soit $x \in E$, on a alors, d'après le théorème précédent

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}''}((\zeta \circ \varphi)(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(\zeta \circ \varphi)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

Or $\zeta \circ \varphi(x) = \zeta(\varphi(x))$, d'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}''}((\zeta \circ \varphi)(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\zeta)\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi(x))$$

On sait que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

Donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(\zeta \circ \varphi)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\zeta)\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

On a donc montré que,

$$\forall x \in E, \qquad \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(\zeta \circ \varphi)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\zeta)\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

C'est-à-dire

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(\zeta \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\zeta)\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$$

$\square$

Propriété 22.16: Matrice de l'inverse d'une applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finies, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.
Alors φ est bijective si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$ est inversible et dans ce cas on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\right)^{-1}$$

Remarque 22.10. On a vu plus haut que s'il existe une bijection entre E et F alors $\dim(E) = \dim(F)$, on retrouve là le fait déjà connu qu'une matrice inversible est forcement carrée.

Démonstration. Commençons par remarquer que, quelque soit la base $\mathcal{B}$, on a toujours

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_{\dim(E)}$$

Supposons que φ est bijective
D'après le résultat précédent on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi^{-1} \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\varphi^{-1})\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$$

C'est-à-dire
$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\varphi^{-1})\mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = I_{\dim(E)}$$
De même
$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_F) = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi \circ \varphi^{-1}) = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\varphi^{-1})$$
D'où, comme $\dim(E) = \dim(F)$
$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = I_{\dim(E)}$$

On a ainsi prouvé que $\mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$ est inversible et que
$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \left(\mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\right)^{-1}$$

Réciproquement supposons que $M = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$ est inversible, notons M^{-1} son inverse et $\psi\mathcal{L}(F,E)$ l'application linéaire de F dans E associée à M^{-1} de la base$\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, on a alors
$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\psi \circ \varphi) = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\psi)\mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = M^{-1}M = I_{\dim(E)} = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$$
On sait que, les bases étant données, à toute matrice est associé un unique endomorphisme, comme $\mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\psi \circ \varphi) = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ alors $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$.

De même on obtient $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_F$. φ est donc bien bijective et
$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \left(\mathsf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\right)^{-1}$$

□

Exercice 22.6. Soient f et g les applications
$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x+y, x-y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x+2y, 2x+4y) \end{array}.$$

1. Montrer que f et g sont des applications linéaires.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
4. Déterminer les applications linéaires $g \circ f$ et $f \circ g$.
5. f est-elle bijective ? et g ? Le cas échéant, déterminer l'application linéaire réciproque.

22.4.3 Noyau et image d'une matrice

Via la correspondance entre application linéaire et matrices, on peut définir noyau et image d'une matrice.

Définition 22.7 (Noyau d'une matrice)**.** Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On définit le noyau de M, noté Ker(M) par
$$\mathsf{Ker}(M) = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ , \ MX = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})}\right\}$$

Définition 22.8 (Image d'une matrice)**.** Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On définit l'image de M, noté Im (M) par
$$\begin{aligned}\mathsf{Im}\ (M) &= \{MX, \quad X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\} \\ &= \{Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ Y = MX\}\end{aligned}$$

22.4.4 Rang d'une application linéaire

Définition 22.9. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle alors rang de l'application φ et on note rg(φ) l'entier

$$\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im }(u))$$

Propriété 22.17

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$
Alors $\text{rg}(\varphi) = \text{rg}\left(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)\right)$

Démonstration. C'est une simple conséquence des résultats précédents

On a

$$\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im }(\varphi)) = \dim\left(\text{Vect}\left(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)\right)\right) = \text{rg}\left(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)\right)$$

□

On a vu précédemment que le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans une base. Dans le contexte des applications linéaires ce résultat se reformule par la proposition suivante

Propriété 22.18

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, on a alors

$$\text{rg}(\varphi) = \text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\right)$$

Propriété 22.19

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, on a alors

$$\text{rg}(\varphi) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$$

Démonstration. Im (φ) est un sous-espace vectoriel de F, ainsi $\dim(\text{Im }(\varphi)) \leqslant \dim(F)$, c'est-à-dire $\text{rg}(\varphi) \leqslant \dim(F)$.

Notons $n = \dim(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

On a alors Im $(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n))$, d'où $\dim(\text{Im }(\varphi)) \leqslant n$, c'est-à-dire $\text{rg}(\varphi) \leqslant \dim(E)$ □

Corollaire 22.3. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si Ker$(M) = 0$.*

Exercice 22.7. On reprend l'application de l'exercice 22.4. Calculer le rang de f. Déterminer une base de Im (f).