TD$_{22}$ Applications linéaires

1 Image, noyau et applications

Exercice 1
On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (-2y+3z+t, -x-2y+3z+t, -x+2z+t). \end{array}$$

Déterminer une base et la dimension de Ker f. Donner $rg(f)$.

Exercice 2
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+5y+5z, x+2y+2z, x+3y+3z) \end{array}$$

Déterminer le noyau et l'image de f, et vérifier que le noyau est inclus dans l'image.

Exercice 3
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner une base de Ker f et de Im f.

Exercice 4
Pour chaque application linéaire, déterminer son noyau et son image. Est-elle injective ? surjective ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par : $f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z)$.

Exercice 5
Soient les applications linéaires :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z) \end{array} \quad \text{et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+y, x-y, 2x+3y) \end{array}$$

Déterminer le rang, l'image et le noyau de ces applications linéaires. On précisera si elles sont injectives, surjectives et / ou bijectives.
Si elles sont bijectives, on donnera l'application réciproque.

Exercice 6
Soit $m \in \mathbb{R}$ et f_m l'endomorphisme :

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & ((1+m)x+3y, -x+(1-m)y) \end{array}$$

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m n'est pas bijective. Pour chacune de ces valeurs, déterminer le noyau et l'image de f_m.

2 Écriture matricielle d'une application linéaire.

Exercice 7
Soient

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y, x+z) \end{array} \text{ et } g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 5x+y-z \end{array}$$

1. Vérifier que f et g sont linéaires.
2. Déterminer les matrices de f et g relativement aux bases canoniques.
3. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{E} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = ((1,0),(1,1))$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8
On considère l'application f définie par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (-2y+3z+t, -x-2y+3z+t, -x+2z+t) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
3. On pose :
   $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (1,1,1,0)$, $u_4 = (1,1,1,1)$,
   $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,0)$, $v_3 = (0,2,1)$.
   Vérifier que $\mathcal{E} = (u_1,u_2,u_3,u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F} = (v_1,v_2,v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$.
   Donner la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Exercice 9
1. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

   On pose $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (1,0,0)$ et $u_3 = (0,-1,2)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base. Que remarquez-vous ?
2. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

   On pose $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$ et $v_3 = (1,-1,1)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de g dans cette base. Que remarquez-vous ?

3 Polynômes d'endomorphismes

Exercice 10
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On désigne par h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'expression analytique est :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -2x + y + 2z \\ y' & = & -x + y + z \\ z' & = & -2x + y + 2z \end{array} \right.$$

1. Déterminer la matrice A de h.
2. Déterminer une base de Ker h. Quel est le rang de h ? Donner une base de Imh.
3. Déterminer la matrice de h^2. Quel est le rang de h^2 ? Son noyau, son image ?
4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, justifier que $h^n = h^2$.

Exercice 11
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner une base de Ker f et de Im f.
Montrer que Im $f \subset$ Ker f, en déduire que $f^2 = 0$.
Déterminer M^n, pour tout entier $n \geqslant 2$.

Exercice 12
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice de f^{-1} dans la base canonique. En déduire l'expression analytique de f et de f^{-1}.
2. Déterminer une relation simple entre f^2, f et id. Retrouver alors le résultat du 1.
3. On pose $g = f - id$. Déterminer la matrice B de g dans la base canonique, puis donner une base et la dimension de Ker g et Im g.
   Que vaut $rg(g)$?