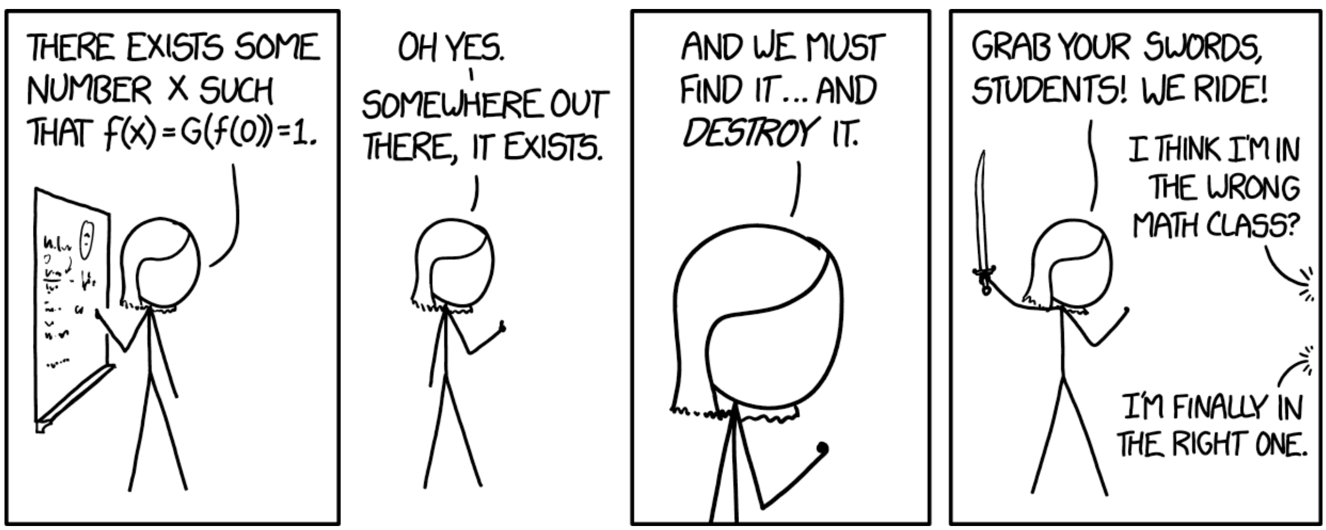
Chapitre 23

Dérivation des fonctions réelles



Sommaire

Dans tout ce chapitre I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

23.1 Dérivabilité

23.1.1 Dérivabilité en un point, fonction dérivée

Définition 23.1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. La fonction f est dite dérivable en x_0 si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite finie quand x tend vers x_0.
Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Remarque 23.1.

- En prenant $h = x - x_0$ on voit que f est dérivable en x_0 si et seulement si $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0.
- On écrit $f'(x)$, ce qui est très différent de $f(x)'$ (qui n'a pas de sens).

Exemple 23.1.

- Soit $K \in \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K \end{array}$ la fonction constante égale à K. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$, en effet on a

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\} \qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0.$$

- Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}, \qquad \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = x + x_0$$

Ainsi $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = 2x_0$, g est donc dérivable en x_0 et $g'(x_0) = 2x_0$.

- Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ et $x_0 > 0$ On a

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}, \qquad \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Ainsi $\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, h est donc dérivable en x_0 et $h'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Par contre $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = +\infty$, h n'est pas dérivable en x_0.

Théorème 23.1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ alors f est continue en x_0.

Démonstration. Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$

φ est alors continue en x_0, de plus on a

$$\forall\, x \in I, \qquad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$$

La fonction $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$ est continue en x_0 et donc f est continue en x_0. □

Remarque 23.2. La réciproque est absolument fausse ! Il existe des fonctions continues mais pas dérivables (voir plus bas l'exemple de la fonction valeur absolue en 0).

Propriété 23.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors*

$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

Démonstration. Simple conséquence de la définition de la dérivée. □

Exemple 23.2. Grâce à cette propriété, on retrouve les équivalents classiques vus au chapitre 16.(hormis celui du cosinus).

- $\sin(x) \underset{0}{\sim}$
- $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim}$
- $e^x - 1 \underset{0}{\sim}$
- $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim}$
- $\ln(x) \underset{1}{\sim}$
- $\sqrt{1 + x} - 1 \underset{0}{\sim}$
- Si $\alpha \neq 0$, $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim}$

Définition 23.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, la fonction f est dite dérivable à gauche en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à gauche en x_0.
De même f est dite dérivable à droite en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à droite en x_0.
Quand ces limites existent on note alors

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Propriété 23.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*
Dans ce cas on a $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Démonstration. Il s'agit d'une application du résultat liant limite avec limite à gauche et à droite. □

Exemple 23.3. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$ On a

$$\forall\, x < 0, \qquad \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\forall x > 0, \qquad \frac{|x|}{x} = 1$$

Ainsi f est dérivable à gauche et à droite en 0 et on a

$$f'_g(0) = -1, \qquad f'_d(0) = 1$$

f n'est alors pas dérivable en 0.

Définition 23.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
On appelle alors fonction dérivée de f la fonction qui, à $x \in I$, associe le nombre dérivée de f en x. On la note f'

Propriété 23.3. *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Là encore la réciproque est fausse !

Remarque 23.3. Parfois, surtout en physique, on note $\frac{df}{dx}$ la dérivée, cette notation est à éviter en mathématiques car elle donne un rôle particulier à la lettre x alors que le choix de la lettre pour la variable est muet.

Exemple 23.4.
- Les fonctions constantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x \end{array}$

23.1.2 Interprétation graphique

Définition 23.4

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $M_0(x_0, f(x_0))$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0.
Pour $x \in I$ notons $M(x, f(x))$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x.
Une droite Δ est dite être la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 si $M_0 \in \Delta$ et si le coefficient directeur de la corde (MM_0) tend vers celui de Δ quand x tend vers x_0.

Remarque 23.4.
- En un certain sens la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M_0 est la « limite des cordes (MM_0) ».
- C'est le problème, très important au 17-ème siècle, de la recherche des tangentes aux courbes des fonctions qui a conduit à l'introduction de la notion de dérivée et, par suite, à une grande partie de l'analyse moderne.

Théorème 23.2

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe possède, au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$.
Cette tangente est la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Remarque 23.5. Dans le cas où f n'est que dérivable à gauche ou à droite on parle alors de demi-tangentes. Il est tout à fait possible que f admet des demi-tangentes à gauche et à droite des coefficients directeurs différents.

La fonction $x \mapsto |x-1|$ est dérivable à gauche et à droite en 1 mais pas dérivable en 1. Sa courbe admet donc une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite.

23.2 Calcul des dérivées

23.2.1 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 23.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont dérivables en x_0 alors $f + g$, λf et $f \times g$ sont dérivables en x_0. On a alors

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$
- $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Si, de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables en x_0. On a alors

- $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Démonstration. • Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$, on a
$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
Ainsi, par somme de limites, $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0 et on a
$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

• Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$, on a
$$\frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(x_0)}{x-x_0} = \lambda \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
Ainsi, par produit de limites, $\frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(x_0)}{x-_0}$ admet une limite finie en x_0 et
$$\lim_{x \to x_0} \frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(x_0)}{x-_0} = \lambda f'(x_0)$$

• Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$, on a
$$\begin{aligned}
\frac{(f \times g)(x)-(f \times g)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{(f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\
&= \frac{(f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\
&= f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}
\end{aligned}$$
f est dérivable en x_0 donc est continue en x_0, on a alors
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$
Ainsi, par produits et sommes de limites, $\frac{(f \times g)(x)-(f \times g)(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0 et on a
$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f \times g)(x)-(f \times g)(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

• On sait que $g(x_0) \neq 0$ et que g est continue en x_0. Ainsi il existe un voisinage de x_0 de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ sur lequel g ne s'annule pas.
Soit ainsi $x \in I \setminus \{x_0\}$ tel que $g(x) \neq 0$, on a
$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} \\
&= \frac{\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0} \\
&= \frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)} \frac{1}{x-x_0} \\
&= -\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)}
\end{aligned}$$

g est dérivable en x_0 et est donc donc continue en x_0, on a alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} = \frac{1}{g(x_0)^2} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$$

Ainsi, par produit de limites, $\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0 et on a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

- $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$, d'après le point précédent $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et le produit de deux fonctions dérivables en x_0 est dérivable en x_0. Ainsi $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)\\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\end{aligned}$$

□

Corollaire 23.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

- *$f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f'+g'$*
- *λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$*
- *$f\times g$ est dérivable sur I et $f\times g)' = f'\times g + g'\times f$*

Si g ne s'annule pas sur I alors

- *$\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{g'}{g^2}$*
- *$\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\times g - g'\times f}{g^2}$*

Théorème 23.4: Dérivée de la composée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$.
On suppose que f est dérivable en x_0 et que g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g\circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g\circ f)'(x_0) = f'(x_0)\times(g'\circ f)(x_0)$$

Démonstration. L'idée est d'écrire

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{f(x)-f(x_0)}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Toutefois cette écriture n'est permise que si $f(x)\neq f(x_0)$ et, à priori, on ne sait rien du tout à ce sujet, on va donc contourner ce problème à l'aide d'une fonction auxiliaire.

Soit φ : $\begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} & \text{si } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{si } y = f(x_0) \end{cases} \end{array}$

On a $\lim_{y\to f(x_0)} \varphi(y) = \varphi(f(x_0))$, φ est donc continue en $f(x_0)$.
Pour $x \in I \setminus \{x_0\}$ on a alors

$$\begin{aligned} \varphi(f(x)) \times \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \begin{cases} g'(f(x_0)) \times \frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{si } f(x)=f(x_0) \\ \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{f(x)-f(x_0)} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{si } f(x) \neq f(x_0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} g'(f(x_0)) \times 0 & \text{si } f(x)=f(x_0) \\ \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} & \text{si } f(x) \neq f(x_0) \end{cases} \end{aligned}$$

Si $f(x) = f(x_0)$ alors $\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = 0$, ainsi

$$\forall x \in I, \qquad \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = \varphi(f(x)) \times \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

f est dérivable en x_0 donc continue, ainsi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. De plus

$$\lim_{y\to f(x_0)} \varphi(y) = \varphi(f(x_0)) = g'(f(x_0)) = (g'\circ f)(x_0)$$

D'où, par composition de limites,

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(f(x)) = (g'\circ f)(x_0)$$

On a également $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Ainsi, par produit de limites,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = (g'\circ f)(x_0) \times f'(x_0) = f'(x_0) \times (g'\circ f)(x_0)$$

□

Corollaire 23.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et*

$$(g\circ f)' = f' \times g' \circ f$$

Théorème 23.5: Dérivée de la bijection réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. D'après le théorème de la bijection continue f est bijective de I dans un intervalle J et sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone de même monotonie que f.
Si, de plus, f est dérivable en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

Démonstration. Soit $y \in J \setminus \{y_0\}$, on a alors

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}$$

On sait que f^{-1} est continue, ainsi $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$

De plus f est dérivable en x_0, on a donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si $x \neq x_0$ alors, comme f est injective, $f(x) \neq f(x_0)$, ainsi $\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ a un sens pour $x \neq x_0$ et on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ainsi, par composition de limites, on a

$$lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

f^{-1} est ainsi dérivable en x_0 et on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

□

Corollaire 23.3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et strictement monotone. D'après le théorème de la bijection continue f est bijective de I dans un intervalle J et sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone de même monotonie que f.*

f^{-1} est alors dérivable sur $\{y \in J \ , \ f'(f^{-1}(y)) \neq 0\}$.

En particulier si f' ne s'annule pas alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Remarque 23.6. Quand on sait que f^{-1} est dérivable, on peut retrouver la formule de la dérivée de f^{-1}.

Soit $g = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$. g est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables et on a, si f^{-1} est dérivable en y et f est dérivable en $f^{-1}(y)$

$$\forall\, y \in J, \qquad g'(y) = (f^{-1})'(y) \times f' \circ f^{-1}(y)$$

De plus

$$\forall\, y \in J \ , \ g'(y) = 1$$

Ainsi

$$\forall\, y \in \{y \in J \ , \ f'(f^{-1}(y)) \neq 0\} \qquad \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Exemple 23.5. Le cas des fonctions :

- Carré et $\sqrt{\cdot}$
- $\ln$ et $\exp$
- $\tan$ et $\arctan$

23.2.2 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Intervalle de dérivabilité	Dérivée
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{n}{x^{n+1}}$
$x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\begin{cases}]0,+\infty[& \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$	$x \mapsto \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto 1/x$
$x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto ax^{a-1}$
$x \mapsto b^x$, $b > 0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \ln(b)b^x$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$
$x \mapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
$x \mapsto \arcsin(x)$	$]-1, 1[$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \mapsto \arccos(x)$	$]-1, 1[$	$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Démonstration. Admis □

23.3 Théorème de Rolle et conséquences

23.3.1 Extremum local

Définition 23.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit f admet un extremum local en x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \text{ou} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Plus précisément, f atteint un maximum local en $x_0 \in I$ si

$$\exists \alpha > 0, \ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

De même, f atteint un minimum local en $x_0 \in I$ si

$$\exists \alpha > 0, \ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \geqslant f(x_0)$$

Exemple 23.6. Par exemple

Théorème 23.6

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x_0 \in]a,b[$. On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in]a,b[$ alors x_0 est un point critique de f (i.e. $f'(x_0) = 0$)

Exemple 23.7. Par exemple

Remarque 23.7.

- La réciproque est fausse. En effet, tous les points critique ne sont pas des extremums, e.g. $f : x \mapsto x^3$ admet 0 comme point critique mais n'admet pas d'extremum local en 0.
- Le résultat n'est valable que si x_0 est « à l'intérieur de l'intervalle »et pas sur un bord. Par exemple la fonction $g : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array}$ admet un maximum local en 1 et un minimum local en 0 mais aucun de ces points n'est un point critique.

Démonstration. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in]a,b[$. On suppose que f admet un maximum local en x_0.

Soit alors $\delta > 0$ tel que

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset]a,b[$$

et

$$\forall\, x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ f(x) \leqslant f(x_0)$$

Alors

$$\forall\, x \in]x_0 - \delta, x_0[, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

$$\forall\, x \in]x_0, x_0 + \delta[, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

D'où

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

Et ainsi, comme $f'(x_0 = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$,

$$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$$

C'est-à-dire

$$f'(x_0) = 0$$

□

23.3.2 Théorème de Rolle, Accroissements finis

Théorème 23.7: de Rolle

Soit $a < b$ deux réels. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. f est continue sur $[a, b]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes. Notons $x_{min} \in [a, b]$ et $x_{max} \in [a, b]$ deux points tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x_{min}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{max})$$

Trois situations sont alors possibles

- $x_{min} \in \{a, b\}$ et $x_{max} \in \{a, b, \}$.
  Comme $f(a) = f(b)$ alors f est constante sur $[a, b]$ et on a alors
  $$\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) = 0$$
- $x_{min} \in \{a, b\}$ et $x_{max} \notin \{a, b, \}$.
  D'après le théorème précédent on a alors $f'(x_{max}) = 0$
- $x_{min} \notin \{a, b\}$
  D'après le théorème précédent on a alors $f'(x_{min}) = 0$

Dans tous les cas on a bien trouvé un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. □

On peut généraliser ce résultat.

Théorème 23.8: Formule des accroissements finis

Soit $a < b$ deux réels. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque 23.8. En particulier si $f(a) = f(b)$ on retrouve le théorème de Rolle.

Démonstration. Soit $g : \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \end{array}$.

g est alors continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et on a

$$\forall\, x \in]a,b[, \qquad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

De plus $g(a) = f(a)$ et

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$$

D'après le théorème de Rolle, il existe alors $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

□

23.3.3 Monotonie, stricte monotonie

Théorème 23.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors

- f est croissante sur I si et seulement si

$$\forall\, x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$$

- f est décroissante sur I si et seulement si

$$\forall\, x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$$

- f est constante sur I si et seulement si

$$\forall\, x \in I, \quad f'(x) = 0$$

Remarque 23.9. Il est important de remarquer que ce théorème ne s'applique que sur un intervalle.

Une fonction définie sur la réunion de deux intervalles de dérivée positive n'est pas forcément croissante (et ne l'est souvent pas)

Par exemple soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$ On a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$$

Pourtant f n'est pas décroissante, en effet on a $-1 < 1$ mais $f(-1) < f(1)$.

Démonstration. On va traiter uniquement le premier cas, les deux autres s'en déduisent aisément. En effet f est décroissante si et seulement si $-f$ est croissante et f est constante si et seulement si f est croissante et décroissante.

- Supposons que f est croissante.
  Soit $x_0 \in I$, on a alors

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \qquad \begin{cases} f(x) - f(x_0) \geqslant 0 & \text{si } x > x_0 \\ f(x) - f(x_0) \leqslant 0 & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$

  Ainsi

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

  D'où, par passage des inégalités à la limite,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

- Supposons désormais que

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$$

  Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$, supposons par l'absurde que $f(a) > f(b)$.
  D'après la formule des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

  Ainsi $f'(c) < 0$, ce qui est absurde.
  f est ainsi bien croissante sur I

□

Propriété 23.4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

- *Si*

$$\forall x \in I, \qquad f'(x) > 0$$

  Alors f est strictement croissante sur I.
- *Si*

$$\forall x \in I, \qquad f'(x) < 0$$

  Alors f est strictement décroissante sur I.

Propriété 23.5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si*

$$\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$$

et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante.
De même, si

$$\forall x \in I \quad f'(x) \leqslant 0$$

et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante.

Exemple 23.8. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x - \sin(x) \end{array}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 1 - \cos(x)$$

Ainsi

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) \geqslant 0$$

et

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$, f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I, ainsi f est strictement croissante sur I. Comme f est strictement croissante sur tout segment de $\mathbb{R}$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a vu que, si f admet un extremum local en un point $x_0 \in I$ alors $f'(x_0) = 0$, la réciproque est, elle, fausse. On a par contre

Propriété 23.6. *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x_0 \in]a, b[$.*
Si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0 alors f atteint un extremum local en x_0.

Remarque 23.10. Il n'y a pas de résultat pour déterminer si f atteint un extremum global en x_0, il faut étudier au cas par cas.

23.4 Dérivées d'ordre supérieur

23.4.1 Définition

Définition 23.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est deux fois dérivable sur I si

- f est dérivable sur I,
- f' est dérivable sur I.

La dérivée de f' s'appelle dérivée seconde de f et se note f'' ou $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ (lire « d 2 f sur d x 2 »).
Plus généralement on définit par récurrence les fonctions n-fois dérivables.
On dit que f est n-fois dérivable sur I si

- f est dérivable
- f' est $n - 1$ fois dérivable

On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f, on a alors

$$f^{(0)} = f \qquad f^{(1)} = f'$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad (f')^{(n-1)} = (f^{(n-1)})' = f^{(n)}$$

Remarque 23.11. On note également $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Définition 23.7

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I (ou que f est n-fois continument dérivable sur I) si f est n-fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I. (Note : Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ est continue.)
  On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. En particulier $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I et $\mathcal{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions dérivables de dérivée continue sur I.
- Si f est n-fois dérivable sur I pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on dit alors que f est infiniment (on indéfiniment) dérivable. On dit également que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
  On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Remarque 23.12. On a

$$\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I)$$

Exemple 23.9.

- Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions sinus, cosinus et exponentielle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonction $\ln$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

23.4.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Propriété 23.7. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $(f, g) \in \mathcal{C}^n(I)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf et $f + g$ sont de classes $\mathcal{C}^n$ sur I et*

- $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
- $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

Corollaire 23.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^n(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
De plus $\mathcal{C}^\infty(I)$ est également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Propriété 23.8. *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J)$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$.*
Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
Si, de plus f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

En particulier dans le cas où $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$ on a

Propriété 23.9. *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, on suppose que*

$$\forall x \in I \quad f(x) \neq 0$$

Alors $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.