TD$_{23}$ Dérivation

1 Dérivée d'une fonction, caractère C^1

Exercice 1 (●○○)
En utilisant la définition de nombre dérivé et en faisant apparaître un taux d'accroissement, calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x+2}-e^2}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos(x)}-1}{x-\frac{\pi}{2}}$

Exercice 2 (●●○)
Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ? de classe C^1 ?

1. $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$
2. $x \mapsto x\sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 3 (●●○)
Soit $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Est-elle dérivable sur cet ensemble ?
2. Calculer f'.
3. Qu'en déduire sur f ?
4. Vérifiez vos résultats en tracant la courbe représentative de f (avec une calculatrice, Geogebra ou Python).

Exercice 4 (●●●)
Soit

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0, \\ e^{-1/x} \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que φ est continue en 0.
2. Montrer que φ est dérivable en 0.
3. Montrer que $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall\, x > 0, \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

5. En déduire que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

2 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Exercice 5 (●○○)
Soit P le polyôme définie par

$$P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2.$$

Montrer que P' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 6 (●○○)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{1 + \cos^2(x)}$$

Montrer que f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Exercice 7 (●●○)
En utilisant le théorème des accroissements finis avec une fonction bien choisie, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

1. $\sqrt{10001} \simeq 100$
2. $\dfrac{1}{0.999^2} \simeq 1$
3. $\cos(1) \simeq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 8 (●●○ Extrait du concours ENS - BCPST 2024)
Soient a_0, a_1, a_2 trois nombres réels et Q le polynôme de degré 3 défini par

$$Q(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

1. Justifier que Q possède au moins une racine réelle.

On suppose désormais que Q possède 3 racines réelles notées z_1, z_2 et z_3, telles que $z_1 \geq z_2 \geq z_3$.

2. Montrer que Q' admet deux racines réelles y_1 et y_2 telles que $z_1 \geq y_1 \geq z_2 \geq y_2 \geq z_3$.
3. Montrer que $a_2^2 \geq 3a_1$.

3 Étude de suites récurrentes

Exercice 9 (●●○)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, 1]$, notée α.
3. Utiliser le théorème des accroissements finis pour montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \sin(1)^n.$$

4. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 10 (●●○)
Soit

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.
2. Si (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, quelles sont les valeurs possibles pour l ?
3. Montrer que pour tout $x, y \in [1,2]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

4. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 11 (●●○)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$. On définit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2 - x}$.

1. Indiquer le domaine de définition D_f de f.
2. Vérifiez que la suite (u_n) est bien définie.
3. Si (u_n) converge, que vaut sa limite ?
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1/2, 3/2]$.
5. En utilisant le théorème des accroissements finis, en déduire que

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{3}|u_n - 1|.$$

   puis que (u_n) converge.