

# Chapitre 24

## Intégration d'une fonction continue sur un segment

### Sommaire

---

24.1	Primitive d'une fonction continue . . . . .	1
24.1.1	Définition, existence . . . . .	1
24.1.2	Primitives usuelles . . . . .	3
24.1.3	Primitives des fonctions composées usuelles . . . . .	3
24.2	Intégrale d'une fonction continue sur un segment . . . . .	3
24.2.1	Définition, lien entre intégrale et primitive . . . . .	3
24.2.2	Interprétation graphique . . . . .	4
24.3	Propriétés de l'intégrale . . . . .	5
24.3.1	Propriétés de base . . . . .	5
24.3.2	Intégration par parties . . . . .	6
24.3.3	Changement de variables . . . . .	8
24.4	Sommes de Riemann, Méthode des rectangles . . . . .	10

---

## 24.1 Primitive d'une fonction continue

### 24.1.1 Définition, existence

#### Définition 24.1

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On appelle primitive de  $f$  toute fonction  $F$  dérivable sur  $I$  telle que  $F' = f$ .

*Remarque 24.1.* Lorsqu'elle existe, cette primitive n'est pas unique.

**Propriété 24.1**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . L'ensemble des primitives de  $f$  sur  $I$  est alors

$$\{F + K, K \in \mathbb{R}\}$$

*Remarque 24.2.* Il est important de travailler sur un intervalle. Le résultat n'est plus vrai sinon.

Soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array}$$

Les fonctions  $F : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(|x|) \end{array}$  et  $G : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + 3 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$

sont deux primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$  mais  $G - F$  n'est pas une fonction constante.

Le principal résultat d'existence de primitives est le suivant

**Théorème 24.1**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Toute fonction continue sur  $I$  admet une primitive sur  $I$ .

*Remarque 24.3.* Dans la plupart des cas on ne peut pas exprimer cette primitive à l'aide des fonctions usuelles.

On peut raffiner un peu ce résultat

**Propriété 24.2**

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$ . Soit  $x_0 \in I$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
Il existe une unique primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $F(x_0) = \lambda$ .

### 24.1.2 Primitives usuelles

Fonction	Intervalle	Primitive
$x \mapsto \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \lambda x$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$	$x \mapsto \ln( x )$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto a^x, a > 0$ et $a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{a^x}{\ln(a)}$
$x \mapsto \ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto x \ln(x) - x$
$x \mapsto x^a, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{x^{a+1}}{a+1}$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\ln( \cos(x) )$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ ou $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$

### 24.1.3 Primitives des fonctions composées usuelles

## 24.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

### 24.2.1 Définition, lien entre intégrale et primitive

#### Propriété 24.3

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  et  $F$  et  $G$  deux primitives de  $f$  sur  $I$ .  
Soit  $(a, b) \in I^2$ , alors

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

#### Définition 24.2

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(I)$ ,  $F$  une primitive de  $F$  sur  $I$  et  $(a, b) \in I^2$ .  
On appelle intégrale de  $f$  de  $a$  à  $b$  le réel

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

*Remarque 24.4.* —  $t$  est appelée la variable d'intégration, le choix de la lettre pour la variable d'intégration n'a pas d'importance mais on évitera au possible d'utiliser une lettre déjà utilisée dans un autre contexte

— Le terme  $dt$  est fondamental et ne doit surtout pas être omis

— On a  $\int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt$

— D'après la proposition précédente le résultat ne dépend pas du choix de la primitive  $F$

**Corollaire 24.1.** Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$  et  $(a, b) \in I^2$ , on a

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

### Théorème 24.2

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  et  $x_0 \in I$ .

Soit  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$

$F$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $x_0$ .

*Remarque 24.5.* Ces deux résultats constituent ce que l'on appelle parfois le théorème fondamental de l'analyse

## 24.2.2 Interprétation graphique

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un segment  $[a, b]$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

### Théorème 24.3

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un segment  $[a, b]$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

L'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est égale à l'aire de la zone située entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ .

Le résultat au programme de BCPST se limite aux fonctions à valeurs positives mais on peut l'étendre aux fonctions à valeurs négatives.

### Propriété 24.4

Soit  $f$  une fonction continue et négative sur un segment  $[a, b]$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

L'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est égale à l'opposé de l'aire de la zone située entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ .

On dira aussi que l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est égale à l'aire algébrique de la zone située entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ .

*Remarque 24.6.* Si  $f$  est une fonction continue qui change de signe entre  $a$  et  $b$  alors  $\int_a^b f(t) dt$  est égale à l'aire algébrique de la zone située entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ . On compte positivement les parties au dessus de l'axe des abscisses et négativement les parties en dessous de l'axe des abscisses.

## 24.3 Propriétés de l'intégrale

### 24.3.1 Propriétés de base

#### Propriété 24.5: Linéarité de l'intégrale

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ . Soit  $(a, b) \in I^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . On a alors

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

#### Propriété 24.6: Relation de Chasles

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{C}^0(I)$ . Soit  $(a, b, c) \in I^3$ . Alors

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

#### Propriété 24.7: Positivité de l'intégrale

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in I^2$  avec  $a < b$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq 0$$

Alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0$$

#### Propriété 24.8: Croissance de l'intégrale

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur l'intervalle  $I$  telles que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x)$$

Alors, si  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $a \leq b$ ,

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

**Propriété 24.9**

Soit  $I$  un intervalle de  $f \in \mathcal{C}^0(I)$ . Soit  $(a, b) \in I^2$  avec  $a < b$ . On sait que  $f$  atteint un maximum et un minimum sur le segment  $[a, b]$ . De plus on a

$$(b - a) \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b - a) \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

**Définition 24.3**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in I^2$  avec  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur  $I$ . On appelle valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  le réel

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt.$$

**Propriété 24.10**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in I^2$  avec  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Alors la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  est atteinte en un point du segment  $[a, b]$ . C'est-à-dire

$$\exists c \in [a, b], \quad f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt.$$

*Remarque 24.7.* On retrouve le théorème des accroissements finis appliquée à la primitive  $F$  de  $f$ .

**Propriété 24.11**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in I^2$  avec  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur  $I$ . On a alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

**Propriété 24.12**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in I^2$  avec  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur  $I$  à valeurs positives ou nulles.

Alors  $\int_a^b f(t) dt = 0$  si et seulement si  $f$  est nulle sur  $[a, b]$ .

**24.3.2 Intégration par parties**

L'intégration par parties est une technique fondamentale de manipulation et de calcul des intégrales qu'il vous faut absolument maîtriser parfaitement.

**Théorème 24.4: Intégration par parties**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $(a, b) \in I^2$ . Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ . Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

On note généralement

$$[u(t)v(t)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

*Remarque 24.8.* Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'effectuer une intégration par parties sera indiquée.

*Exemple 24.1.* Calculons les intégrales suivantes

—  $\int_1^x \ln(t) dt$  où  $x > 1$

Prenons  $u(t) = t$  et  $v(t) = \ln(t)$ . Alors  $u'(t) = 1$  et  $v'(t) = \frac{1}{t}$ . D'où

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t) dt &= [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \frac{1}{t} dt \\ &= x \ln(x) - x + 1 \end{aligned}$$

En particulier  $x \mapsto x \ln(x) - x$  est une primitive de  $x \mapsto \ln(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

—  $\int_0^\pi x \cos(x) dx$

Prenons  $u(x) = \sin(x)$  et  $v(x) = x$ , alors  $u'(x) = \cos(x)$  et  $v'(x) = 1$ . D'où

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos(x) dx &= [x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi x \sin(x) dx \\ &= -[-\cos(x)]_0^\pi \\ &= -2 \end{aligned}$$

—  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2 + t - 1) \sin(t) dt$

On prend  $u(t) = -\cos(t)$  et  $v(t) = t^2 + t - 1$  d'où  $u'(t) = \sin(t)$  et  $v'(t) = 2t + 1$  Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2 + t - 1) \sin(t) dt = [-\cos(t)(t^2 + t - 1)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)(2t + 1) dt$$

On prend ensuite  $a(t) = \sin(t)$  et  $b(t) = 2t + 1$ , d'où  $a'(t) = \cos(t)$  et  $b'(t) = 2$

Alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)(2t + 1) dt = [\sin(t)(2t + 1)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(t) dt = [\sin(t)(2t + 1)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-2 \cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2 + t - 1) \sin(t) dt &= [-\cos(t)(t^2 + t - 1)]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin(t)(2t + 1)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-2 \cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= [-\cos(t)(t^2 + t - 1) + \sin(t)(2t + 1) + 2 \cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi + 1 - 1 - 2 \\ &= \pi - 2 \end{aligned}$$

### 24.3.3 Changement de variables

#### Théorème 24.5

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $\varphi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$  telle que  $\varphi(J) \subset I$ .

Soit  $(a, b) \in J^2$ . On a alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

*Remarque 24.9.* — En général on part du terme de gauche pour arriver au terme de droite mais parfois on partira du terme de droite pour aller vers le terme de gauche.

— Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, le changement de variables sera donné par l'énoncé.

Il y a essentiellement deux manières de rédiger un changement de variables. La première est plus longue et plus rigoureuse mais avec de l'habitude on lui préférera la seconde rédaction, moins rigoureuse mais plus rapide et plus proche des méthodes utilisées en Physique.

*Exemple 24.2.* — Soit  $I = \int_1^2 x \ln(x^2) dx$

Soit  $\varphi : x \mapsto x^2$ . On a alors

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 x \ln(x^2) dx \\ &= \int_1^2 \frac{\varphi'(x)}{2} \ln(\varphi(x)) dx \\ &= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} \frac{\ln(u)}{2} du \\ &= \int_1^4 \frac{\ln(u)}{2} du \\ &= \left[ \frac{u \ln(u) - u}{2} \right]_1^4 \\ &= \frac{4 \ln(4) - 4 + 1}{2} \\ &= 4 \ln(2) - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

— Soit  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^3 dx$

Soit  $u : x \mapsto \cos(x)$ .

Alors  $\frac{du}{dx} = -\sin(x)$



On a alors

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^3 dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{du}{dx}(x)(1 - u(x)^2) dx \\
 &= \int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} u^2 - 1 du \\
 &= \int_1^0 u^2 - 1 du \\
 &= \int_0^1 1 - u^2 du \\
 &= \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= 1 - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Dans ce calcul, tout semble se passer comme si on avait « simplifié » le  $\frac{du}{dx} dx$  en  $du$ . Ce n'est absolument pas le cas mais c'est en cet abus bien pratique que consiste la seconde méthode pour les changements de variables.

— Soit  $H = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$

Posons  $u = \arctan(t)$ . Alors  $u = \tan(t)$  et  $du = \frac{1}{1+t^2} dt$ .

De plus pour  $t = 0$  on a  $u = 0$  et pour  $t = 1$  on a  $u = \frac{\pi}{4}$ .

Alors

$$\begin{aligned}
 H &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan(u)^2} du \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(u)^2 du \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2u)}{2} du \\
 &= \left[ \frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

## 24.4 Sommes de Riemann, Méthode des rectangles

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue dont on ne sait pas calculer l'intégrale. On a vu que l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  correspondait à l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses. On pourrait alors essayer de mesurer cette aire pour approcher la valeur de l'intégrale de  $f$ . Malheureusement cette zone n'est en général pas d'une forme « régulière » dont on pourrait mesurer l'aire facilement. On va alors approcher cette aire en découpant la zone entre  $\mathcal{C}_f$  en plusieurs petits rectangles.

### Théorème 24.6: Cas du segment $[0, 1]$

Soit  $f$  une fonction continue sur le segment  $[0, 1]$ . Alors

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

### Théorème 24.7: Cas général

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur le segment  $[a, b]$ . Alors

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

*Remarque 24.10.* — Les deux sommes sont appelées des sommes de Riemann associées à  $f$ .

- La première somme correspond à la méthode dite des rectangles à gauche et la seconde somme à la méthode des rectangles à droite.
- Ce résultat permet de déterminer des valeurs approchées d'intégrale que l'on ne peut pas calculer explicitement.