Chapitre 25

Équations différentielles linéaires

Sommaire

25.1 Motivations

Les équations différentielles sont un outil fondamental en sciences dès que l'on cherche à modéliser des phénomènes évoluant dans le temps selon des lois données, que ce soit en physique, en chimie, en écologie voire en économie. On va donner plusieurs exemples de situations faisant intervenir des équations différentielles.

Exemple 25.1. 1. *Cinétique d'une réaction chimique*

Considérons un système réactionnel fermé, de volume V constant, constitué d'un certain nombre d'espèces physicochimiques $A, B, C, \dots$; on note $[A](t)$ (resp. $[B](t)$, etc) la concentration en espèce A. Une réaction d'ordre 1 est une réaction de la forme :

$$\alpha A \to \varphi F + \gamma G + \cdots$$

Dans ce cas la concentration de A varie au cours du temps et sa vitesse de variation est proportionnelle à la quantité d'espèce A encore présente : Plus il y a d'espèce A, i.e. plus $[A](t)$ est grand, plus $[A](t)$ décroit rapidement, i.e. $[A]'(t)$ est un grand nombre négatif.

Plus précisément la concentration $[A]$ de A vérifie l'équation différentielle :

$$[A]'(t) = -\alpha k[A](t)$$

où k est la constante de vitesse de la réaction, qui ne dépend que de la température. Les réactions d'ordre 1 sont notamment des réactions comportant un seul réactif (qui subit une décomposition, une isomérisation ...), ou dans lesquelles un soluté réagit avec le solvant.

— Décomposition du peroxyde d'hydrogène : $2H_2O_{2(aq)} = 2H_2O_{(l)} + O_{2(g)}$

— Décomposition du pentoxyde d'azote gazeux : $2N_2O_{5(g)} = 4NO_{2(g)} + O_{2(g)}$

— Isomérisation du cyclopropane en propène : $(CH_2)_3 = CH_3 - CH = CH_2$

2. *Masse reliée à un ressort (Oscillateur harmonique linéaire)* On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on se donne un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0. On attache une extrémité de ce ressort à un repère fixe d'abscisse 0 et l'autre extrémité à une masse m qui repose sur le sol. La masse est alors soumise à la tension du ressort, à la gravité et à la réaction du sol.

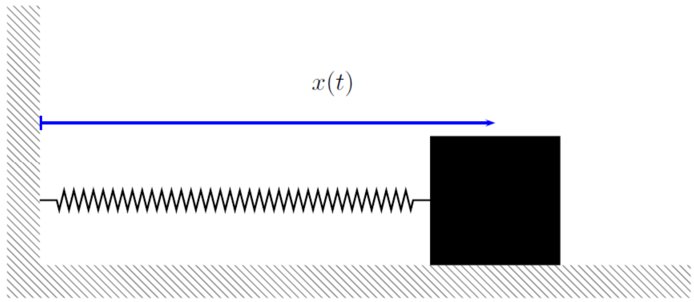

FIGURE 25.1 – La force de rappel s'exerçant sur un ressort

On suppose que les frottements sont négligeables. Quand la masse se trouve à une distance $x(t)$ du repère fixe vertical elle subit alors une force de rappel

$$\vec{F} = -k(x(t) - l_0)\vec{u}$$

Le principe fondamental de la dynamique nous dit alors que

$$mx''(t) = -k(x(t) - l_0)$$

3. *Circuit RLC*
On s'intéresse au montage suivant :

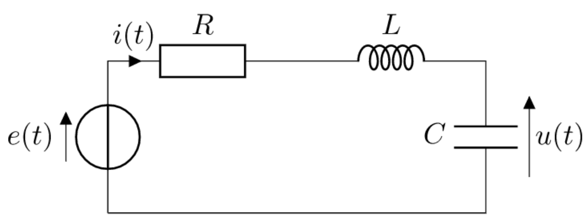

FIGURE 25.2 – Un circuit RLC monté en série

On rappelle que :
— L'intensité $i(t)$ du courant à travers le condensateur vérifie

$$\forall\, t \geqslant 0 \quad i(t) = Cu_C'(t)$$

où $u_C(t)$ est la tension aux bornes du condensateur.
— La tension $u(t)$ aux bornes de la bobine idéale vérifie

$$\forall\, t \geqslant 0 \quad u_L(t) = Li'(t)$$

où $i(t)$ est l'intensité du courant traversant la bobine.

— La tension aux bornes de la résistance s'écrit

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_R(t) = Ri(t)$$

Le générateur applique au circuit une tension $e(t)$. Dans ces conditions, la tension aux bornes du condensateur, $u_C(t)$ vérifie alors l'équation différentielle

$$\forall t \geqslant 0 \quad u_C(t) + RCu_C'(t) + LCu_C''(t) = e(t)$$

4. *Modèles de populations* Depuis longtemps les scientifiques ont cherché à comprendre et prédire les évolutions dans la taille et la composition des populations humaines et animales.

   Historiquement Malthus fut un des précurseur de ce que l'on appelle aujourd'hui l'écologie en modélisant l'évolution de la population humaine $x(t)$ par l'équation différentielle

   $$x'(t) = ax(t)$$

   où a est un taux mixte de natalité/mortalité. Par la suite Verhulst a amélioré ce modèle en considérant que les ressources naturelles sont limités, ce qui l'a mené à l'équation différentielle

   $$x'(t) = ax(t)(K - x(t))$$

   Il y a bien d'autres modèles de population (et la recherche continue) sur lesquels on reviendra plus en détail plus tard dans l'année.

Dans ce chapitre on s'intéressera uniquement aux équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

25.2 Généralités sur les équations différentielles linéaires

Définition 25.1 (Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants)**.** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

- L'équation
  $$y' + ay = b \qquad (\mathcal{E})$$
  où l'inconnue est la fonction y est appelée une équation différentielle
  $$\underbrace{\text{linéaire}}_{\substack{y' \text{ et } y \text{ n'interviennent} \\ \text{qu'à la puissance } 1}} \quad \underbrace{\text{d'ordre } 1}_{\substack{\text{seuls } y \text{ et } y' \\ \text{apparaissent}}} \quad \underbrace{\text{à coefficients constants.}}_{a \text{ et } b \text{ sont des constantes}}$$
- On appelle l'équation
  $$y' + ay = 0 \qquad (\mathcal{H})$$
  l'équation différentielle homogène associée à $(\mathcal{E})$.
- Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
  $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y'(t) + ay(t) = b$$

Définition 25.2 (Équation différentielle linéaire d'ordre 1)**.** Soient a et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues

- L'équation
$$y' + a(t)y = f(t) \qquad (\mathcal{E})$$
où l'inconnue est la fonction y est appelée une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- On appelle l'équation
$$y' + a(t)y = 0 \qquad (\mathcal{H})$$
l'équation différentielle homogène associée à $(\mathcal{E})$.
- Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

Définition 25.3 (Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants)**.**

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'équation
$$y'' + ay' + by = f(t) \qquad (\mathcal{E})$$
où l'inconnue est la fonction y est appelée une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- On appelle l'équation
$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (\mathcal{H})$$
l'équation différentielle homogène associée à $(\mathcal{E})$.
- Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction deux fois dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

Définition 25.4: Problème de Cauchy

Soient a et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ Le problème
$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y' + a(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
est appelé un problème de Cauchy.
De même, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ Le problème
$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$
est aussi appelé un problème de Cauchy.

Remarque 25.1. Il est important que les deux conditions initiales portent sur le même instant t_0.

Théorème 25.1: Principe de superposition pour les équations de degré 1

Soit a, f et g des fonctions continues sur un intervalle I et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = f(t)$$

et soit y_2 une solution de l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = g(t)$$

.
Alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de

$$y' + a(t)y = \lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)$$

.

Théorème 25.2: Principe de superposition pour les équations de degré 2

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, f et g deux fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

et soit y_2 une solution de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = g(t)$$

.
Alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de $y'' + ay' + by = \lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)$.

Remarque 25.2. Le principe de superposition est très utile en physique et en particulier en mécanique. Considérons une solide de masse M soumis à deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ que l'on suppose colinéaires à l'axe Ox. Le solide est alors en mouvement rectiligne et sa position au cours du temps $x(t)$ vérifie le principe fondamental de la dynamique

$$Mx''(t) = F_1 + F_2$$

Il est parfois compliqué de résoudre cette équation différentielle. Toutefois le principe de superposition nous dit qu'il suffit de résoudre les équations différentielles

$$Mx''(t) = F_1 \qquad \text{et } Mx''(t) = F_2$$

et d'additionner les solutions.

Théorème 25.3: Structure de l'ensemble des solutions

Soit $(\mathcal{E})$ une équation différentielle linéaire (d'ordre 1 ou 2) et $(\mathcal{H})$ l'équation homogène associée.
Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$.
Soit y_0 une solution ***particulière*** de $(\mathcal{E})$ alors

$$\mathcal{S} = \{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$$

En français cela signifie que l'on obtient les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ en additionnant une solution particulière de $(\mathcal{E})$ aux solutions de $(\mathcal{H})$

Méthode 25.1: Méthode pour résoudre les équations différentielles linéaires

On en déduit une méthode pour résoudre les équations différentielles linéaires

- On résout l'équation homogène $(\mathcal{H})$ (par une méthode que l'on verra un peu plus tard)
- On trouve une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
- On obtient la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$ en additionnant notre solution particulière à la forme générale des solutions de $(\mathcal{H})$.

25.3 Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Comment procéder pour résoudre l'équation différentielle $y' + ay = b$?
On va suivre la méthode expliquée plus haut.

25.3.1 Résolution de l'équation homogène

Théorème 25.4: Solutions d'une EDL homogène d'ordre 1 à coefficients constants

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1

$$y' + ay = 0 \qquad (\mathcal{H})$$

admet comme ensemble de solutions

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{t \mapsto Ke^{-at} \ , \ K \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple 25.2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles

1. $y' + 2y = 0$,
2. $y' = y$,
3. $y' = 0$.

25.3.2 Résolution de l'équation générale $y' + ay = b$ (cas d'un terme source constant)

Il nous reste maintenant à trouver une solution particulière. Pour cela on va chercher parmi les fonctions les plus simples qu'il soit : les fonctions constantes et les fonctions affines :

— Premier cas $a \neq 0$

Soit $C \in \mathbb{R}$ et y_0 : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto C \end{array}$. Alors y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle.

y_0 va alors être solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad ay(t) = b$$

C'est-à-dire si et seulement si $C = \frac{b}{a}$

— Second cas $a = 0$.

Soit $C \in \mathbb{R}$ et y_0 : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto Ct \end{array}$. Alors y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée constante égale à C

y_0 va alors être solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad y'(t) = b$$

C'est-à-dire si et seulement si $C = b$

On résume cela dans la proposition suivante :

Propriété 25.1: Solution particulière d'une EDL d'ordre 1 à coefficients constants

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' + ay = b \qquad (\mathcal{E})$$

— Si $a \neq 0$ alors y_0 : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{b}{a} \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$.

— Si $a = 0$ alors y_0 : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto bt \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$.

On en déduit le théorème suivant

Théorème 25.5: Ensemble des solutions d'une EDL d'ordre 1 à coefficients constants

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

$$y' + ay = b \tag{$\mathcal{E}$}$$

— Si $a \neq 0$ alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ke^{-at} + \frac{b}{a} \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

— Si $a = 0$ alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\mathcal{S} = \{ t \mapsto K + bt \ , \ K \in \mathbb{R} \}$$

Théorème 25.6: Solution du problème de Cauchy

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ Le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Exemple 25.3. Résoudre le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y' - 3y = 5 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $y' - 3y = 5$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ke^{3t} - \frac{5}{3} \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

Soit $K \in \mathbb{R}$ et $y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto Ke^{3t} - \frac{5}{3} \end{array}$ On va déterminer pour quelle valeur de K a-t-on $y(0) = 2$. On a $y(0) = K - \frac{5}{3}$, il nous faut donc prendre $K = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$ Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ est

$$y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{11e^{3t} - 5}{3} \end{array}$$

25.4 Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On cherche résoudre l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$. On va procéder suivant le même schéma que pour les équation du premier ordre

25.4.1 Résolution de l'équation homogène

Théorème 25.7: Solutions d'une EDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (\mathcal{H})$$

Soit

$$P : \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 + ax + b \end{array}$$

On appelle P le polynôme caractéristique de l'équation $(\mathcal{H})$.
3 cas sont alors possibles :

- Le polynôme P admet deux racines réelles distinctes λ et μ. L'ensemble $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ des solutions de $(\mathcal{H})$ est alors
$$\mathcal{S}_\mathcal{H} = \left\{ t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
- Le polynôme P admet une racine double λ. L'ensemble $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ des solutions de $(\mathcal{H})$ est alors
$$\mathcal{S}_\mathcal{H} = \left\{ t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
- Le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. L'ensemble $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ des solutions de $(\mathcal{H})$ est alors
$$\mathcal{S}_\mathcal{H} = \left\{ t \mapsto e^{\alpha t} \left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t) \right) \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Remarque 25.3. Dans le cas où P admet deux racines complexes on a que

$$\mathcal{S}_\mathcal{H} = \left\{ t \mapsto e^{\alpha t} \left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t) \right) \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Or, on sait qu'une expression de la forme $A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$ peut se mettre sous la forme $R\cos(\beta t + \varphi)$ avec $(R, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. On peut alors montrer que

$$\mathcal{S}_\mathcal{H} = \left\{ t \mapsto Re^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi) \ , \ (R, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Une telle écriture a plus d'intérêt en physique qu'en mathématiques car elle permet une lecture aisée de l'amplitude et du décalage de phase de la solution. En mathématiques on préférera la forme $t \mapsto e^{\alpha t} \left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t) \right)$ qui a l'avantage de faire apparaître clairement une base de l'espace des solutions (au sens des bases des espaces vectoriels, notion qui viendra plus tard dans l'année).

Exemple 25.4. Résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 2 suivantes

1. $y'' - y' - 12y = 0$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$
3. $y'' - 8y' + 17y = 0$

1. Soit $P_1 = X^2 - X - 12$. Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-12) = 49 = 7^2$. P admet donc deux racines réelles distinctes qui sont 4 et -3. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_1)$ est donc
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_1} = \left\{ t \mapsto Ae^{4t} + Be^{-3t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. Soit $P = X^2+4X+4$. Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est $\Delta = 4^2-4\times 4 = 0$. P admet donc une racine double qui est -2. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_2} = \left\{t \mapsto Ae^{-2t} + Bte^{-2t}\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

3. Soit $P = X^2 - 8X + 17$. Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est $\Delta = (-8)^2 - 4\times 17 = 64-68 = -4$. P admet donc deux racines complexes conjuguées qui sont $4+i$ et $4-i$ L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_3)$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_3} = \left\{t \mapsto e^{4t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right)\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

25.4.2 Résolution de l'équation générale - cas d'un terme source constant

Maintenant que l'on a résolu $(\mathcal{H})$ il ne nous reste plus qu'à déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre. Là encore on va chercher parmi des fonctions simples : les fonctions polynomiales de degré 2.

Soit donc $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \alpha t^2 + \beta t + \gamma \end{array}$, on cherche à quelle condition sur (α,β,γ) f est-elle solution de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c \qquad (\mathcal{E})$$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = 2\alpha t + \beta \qquad f''(t) = 2\alpha$$

Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$f''(t) + af'(t) + bf(t) = b\alpha t^2 + (b\beta + 2a\alpha)\, t + (2\alpha + a\beta + b\gamma)$$

f est donc solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si

$$\begin{cases} b\alpha & = 0 \\ b\beta + 2a\alpha & = 0 \\ 2\alpha + a\beta + b\gamma & = c \end{cases}$$

3 situations sont alors possibles

— Si $b \neq 0$ alors on prend $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = \frac{c}{b}$, soit $f : t \mapsto \frac{c}{b}$

— Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors on prend $\alpha = 0$, $\beta = \frac{c}{a}$ et $\gamma = 0$, soit $f : t \mapsto \frac{c}{a}t$

— Si $b = 0$ et $a = 0$ alors on prend $\alpha = \frac{c}{2}$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, soit $f : t \mapsto \frac{c}{2}t^2$

On en déduit la proposition suivante

Propriété 25.2: Solution particulière d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c \tag{$\mathcal{E}$}$$

3 situations sont alors possibles

— Si $b \neq 0$ alors $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{c}{b} \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$

— Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{c}{a}t \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$

— Si $b = 0$ et $a = 0$ alors $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{c}{2}t^2 \end{array}$ est une solution de $(\mathcal{E})$

En combinant les solutions de $(\mathcal{H})$ et les solutions particulières de $(\mathcal{E})$ on obtient alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

Théorème 25.8: Ensemble des solutions d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c \tag{$\mathcal{E}$}$$

On définit f_0 par

— Si $b \neq 0$ alors $f_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{c}{b} \end{array}$

— Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors $f_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{c}{a}t \end{array}$

— Si $b = 0$ et $a = 0$ alors $f_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{c}{2}t^2 \end{array}$

On définit le polynôme $P = X^2 + aX + b$
Plusieurs cas sont possibles

- Le polynôme P admet deux racines réelles distinctes λ et μ. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ est alors
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{ t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} + f_0 \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
- Le polynôme P admet une racine double λ. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ est alors
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{ t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} + f_0 \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
- Le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ est alors
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{ t \mapsto e^{\alpha t} \left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t) \right) + f_0 \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Remarque 25.4. A priori il semble y avoir 9 cas possibles mais si on regarde de plus près il n'y en a que 5.

En effet, si $b=0$ et $a\neq 0$ alors $P=X^2+aX$ admet forcement deux racines réelles distinctes (0 et $-a$) et si $a=b=0$ alors $P=X^2$ admet une racine double 0.

Théorème 25.9: Problème de Cauchy d'ordre 2

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $t_0\in\mathbb{R}$ et $(y_0,y_0')\in\mathbb{R}^2$ Le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y''+ay'+by=c \\ y(t_0)=y_0 \\ y'(t_0)=y_0' \end{cases}$$

admet une unique solution.

Exemple 25.5. Résolvons le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y''-8y'+17y=5 \\ y(0)=3 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$$

On a déjà vu que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y''-8y'+17y=0$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}=\left\{t\mapsto e^{4t}\left(A\cos(t)+B\sin(t)\right)\ ,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

On cherche une solution particulière de l'équation différentielle $y''-8y'+17y=5$. La fonction $t\mapsto\frac{5}{17}$ convient. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''-8y'+17y=5$ est

$$\mathcal{S}=\left\{t\mapsto\frac{5}{17}+e^{4t}\left(A\cos(t)+B\sin(t)\right)\ ,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Soit $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ et $y : \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ t\longmapsto\frac{5}{17}+e^{4t}\left(A\cos(t)+B\sin(t)\right)\end{array}$ On va déterminer les valeurs de A et B pour lesquelles $y(0)=3$ et $y'(0)=-1$. On a

$$\begin{cases} y(0) &= \frac{5}{17}+A \\ y'(0) &= 4A+B \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} A &= 3-\frac{5}{17} \\ B &= -1-4A \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} A &= \frac{46}{17} \\ B &= -\frac{201}{17} \end{cases}$$

Finalement l'unique solution de notre problème de Cauchy est

$$y : \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ t\longmapsto\dfrac{5+e^{4t}\left(46\cos(t)-201\sin(t)\right)}{17}\end{array}$$

25.5 Équations différentielles d'ordre 1, cas général

On étudie maintenant les équations différentielles de la forme

$$y' + a(t)y = b(t), \tag{$\mathcal{E}$}$$

où a et b sont des fonctions continues, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On cherche donc les fonctions y dérivables telles que

$$\forall\, t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

L'équation homogène associée est

$$y' + a(t)y = 0. \tag{$\mathcal{H}$}$$

Méthode 25.2: Résolution d'une EDL d'ordre 1

La résolution de $(\mathcal{E})$ suit les mêmes principes que dans le cas où des coefficients constants :

1. On détermine les solutions de l'équation homogène $(\mathcal{H})$.
2. On détermine une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
3. Les solutions de $(\mathcal{E})$ s'obtiennent comme somme de la solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
4. Si une condition initiale de type $y(t_0) = y_0$ est donnée, on l'utilise pour déterminer le paramètre C dont dépendent les solutions trouvées.

Attention ! la détermination des solutions de l'équation homogène et (surtout) d'une solution particulière est plus délicate que dans le cas des coefficients constants.

25.5.1 Solutions de l'équation homogène

Théorème 25.10: Solutions de l'équation homogène

On note A une primitive de a sur l'intervalle I. Les solutions de l'équation $(\mathcal{H})$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto Ce^{-A(t)},$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Remarque 25.5. Si a est une constante, une primitive est donnée par $A(t) = at$ et on retrouve la même formule que dans le cas des coefficients constants.

25.5.2 Recherche d'une solution particulière

On décrit la méthode de la *variation de la constante*. Cette méthode fonctionne toujours mais il y a souvent plus rapide : on décrira d'autres méthodes de résolution dans la dernière partie.

On cherche les solutions de $(\mathcal{E})$ $y' + a(t)y = b(t)$. On connait les solutions de l'équation homogène $(\mathcal{H})$: les fonctions de la forme

$$t \mapsto Ce^{-A(t)},$$

où A est une primitve de a. On cherche maintenant une solution particulière de $(\mathcal{E})$.

Méthode 25.3: Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme $y(t) = C(t)e^{-A(t)}$, où C est une fonction dérivable inconnue. La constante C est donc devenue une fonction *variable*, d'où le nom de la méthode. On calcule :

$$y'(t) = C'(t)e^{-A(t)} - C(t)A'(t)e^{-A(t)} = e^{-A(t)}\Big(C'(t) - C(t)a(t)\Big).$$

D'où

$$y'(t) + a(t)y(t) = e^{-A(t)}\Big(C'(t) - C(t)a(t)\Big) + a(t)C(t)e^{-A(t)} = C'(t)e^{-A(t)}.$$

Ainsi, y est solution de (E) ssi $C'(t)e^{-A(t)} = b(t)$, c'est-à-dire ssi

$$C(t) \text{ est une primitive de } b(t)e^{A(t)}.$$

On est donc ramené à un calcul de primitive.

Remarque 25.6. Le calcul est à refaire à chaque fois ; on n'attend pas une connaissance par cœur du résultat.

Exercice 25.1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y' + y = \frac{1}{1+e^x} \qquad (\mathcal{E})$$

Exercice 25.2. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \qquad (\mathcal{E})$$

Exercice 25.3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$y' + \frac{3}{t^2}y = \exp\Big(\frac{3}{t}\Big). \qquad (\mathcal{E})$$

Exercice 25.4. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$y' - \frac{2}{t^3}y = \frac{1}{t}\exp\Big(-\frac{1}{t^2}\Big). \qquad (\mathcal{E})$$

25.6 Recherche de solutions particulières - équations spécifiques

La méthode de la variation de la constante peut être lourde à mettre en œuvre. Pour certains types d'équations, on peut deviner la forme d'une solution particulière ; on présente quelques unes de ces situations.

25.6.1 Solutions évidentes

Si on constate qu'une fonction simple est solution, il n'y a pas besoin d'aller plus loin. En pratique, si on a une équation de la forme

$$y' + a(t)y = b(t)$$

et si les fonctions a et b sont proportionnelles, on a une solution constante (et il serait dommage de perdre du temps à trouver cette solution par variation de la constante).

Exercice 25.5. Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$(E)\ y' + ty = 2t.$$

25.6.2 Ordre 1 - coefficients constants - second membre $P(t)e^{\gamma t}$

On considère une équation de la forme

$$(E)\ y' + ay = P(t)e^{\gamma t},$$

où $a \in \mathbb{R}$, P est un polynôme et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Propriété 25.3. *L'équation (E) admet une solution particulière de la forme*

— $t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ *si* $\gamma \neq -a$ *;*

— $t \mapsto tQ(t)e^{\gamma t}$ *si* $\gamma = -a$*,*

Q étant un polynôme de même degré que P.

Remarque 25.7. Bien noter les cas particulier suivants :

— $\gamma = 0$: le second membre est polynomial

— $P = 1$: le second membre est en $e^{\gamma t}$.

Exercice 25.6. Donner une solution particulière de

$$y' - 3y = te^{2t}.$$

Exercice 25.7. Donner une solution particulière de

$$y' + 2y = e^{-2t}.$$

25.6.3 Ordre 2 - coefficients constants - second membre $P(t)e^{\gamma t}$

On considère une équation de la forme

$$(E)\ y'' + ay' + by = P(t)e^{\gamma t},$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, P est un polynôme et $\gamma \in \mathbb{R}$.

On note χ le polynôme caractéristique $X^2 + aX + b$.

Propriété 25.4. *L'équation (E) admet une solution particulière de la forme*

— $t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ *si γ n'est pas racine de χ ;*

— $t \mapsto tQ(t)e^{\gamma t}$ *si γ est racine simple de χ ;*

— $t \mapsto t^2Q(t)e^{\gamma t}$ *si γ est racine double de χ,*

Q étant un polynôme de même degré que P.

25.6.4 Ordre 1 - coefficients constants - second membre trigonométrique

On considère une équation de la forme

$$(E)\ y' + ay = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega),$$

où a, A, B et ω sont des constantes réelles.

Propriété 25.5. *L'équation (E) admet une solution particulière de la forme*

$$t \mapsto C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t),$$

où C et D sont des constantes réelles.

25.6.5 Ordre 2 - coefficients constants - second membre trigonométrique

On considère une équation de la forme

$$(E)\ y'' + ay' + by = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega),$$

où a, b, A, B et ω sont des constantes réelles.

On note χ le polynôme caractéristique $X^2 + aX + b$.

Propriété 25.6. *L'équation (E) admet une solution particulière de la forme*

— $t \mapsto C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$ *si $i\omega$ n'est pas racine de χ ;*

— $t \mapsto Ct\cos(\omega t) + Dt\sin(\omega t)$ *si $i\omega$ est racine de χ,*

où C et D sont des constantes réelles.