TD$_{26}$ Développements limités

I est un intervalle non trivial tel que 0 est un élément de I ou 0 est une borne de I,

Définition :

Soit n un entier naturel et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$,
Dire que f admet un développement limité d'ordre n en 0 signifie qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots a_n$ et une fonction ε de I dans $\mathbb{R}$ tels que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \varepsilon(x) x^n$$

Lorsque n est fixé un tel développement est unique.

Notation :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + o\left(x^n\right)$$

Théorème : *La formule de Taylor-Young*

Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ alors

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o(x^n)$$

Exercice 1
Calculer les développements limités suivants :

1. le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = e^x$.
2. le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \tan(x)$.
3. le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Exercice 2
Calculer pour entier n quelconque le développement en 0 d'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x$.
2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$. *(A savoir déterminer sans le théorème de Taylor-Young)*
3. $f(x) = \sin(x)$
4. $f(x) = \cos(x)$
5. $f(x) = \ln(1+x)$

Vous devez connaître tous les résultats de cet exercice.

Exercice 3

Justifier que pour un réel α et n un entier naturel on a :

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

A connaître aussi.

En déduire :

1. Le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x)=(1+x)^8$.
2. Le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.
3. Le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x)=\sqrt{x+1}$.
4. Le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$.

Exercice 4

En utilisant les développements limités, déterminer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués

1. $\dfrac{\sin(x)-x}{x^2}$ en 0
2. $\dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$ en 0
3. $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ en 0
4. $2\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$ en 0

Exercice 5

En utilisant les développements limités, déterminer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués

1. $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ en 0
2. $\dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x(1-\cos(x))}$ en 0
3. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}$ en 0
4. $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ en 0