TD$_{25}$ Equations différentielles

Exercice 1 (✎)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes

1. $y' = 4y$,
2. $y' + 4y = 3$,
3. $3y' + 5y = 2$.

Exercice 2 (✎)
1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 5x = 9$.
2. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 5y = 9$.
   (b) Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + 5y = 9, \\ y(2) = \dfrac{9}{5}. \end{cases}$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 5y = x$.

Exercice 3 (✎)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes
1. $y'' - 9y = 0$,
2. $y'' - 9y = -18$,
3. (oscillateur harmonique) $y'' + \omega^2 y = 0$ (où ω est un réel fixé),
4. $y'' - 3y' + 2y = \cos(3x)$,
   Indication : chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$,
5. (a) $y'' - 2y' + y = x + 3$
   Indication : chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = ax + b$,
   (b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 5$ et $f'(0) = 2$.
6. $y'' - 4y' + 5y = e^x$
   Indication : chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = (ax + b)e^x$
7. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$,
   Indication : chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = ax^2 + bx + c$,

Exercice 4 (✎)
Résoudre les équations différentielles suivantes en appliquant la méthode de la variation de la constante :

1. $y' + 2y = e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$,
2. $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$ sur $\mathbb{R}$,
3. $y' = \dfrac{y}{x} + x$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
4. $y' - \left(2x - \dfrac{1}{x}\right) y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ avec $y(1) = 1$.

Exercice 5 (♥)
Résoudre le système différentiel suivant sur $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) - y(t) = 0, \\ x(t) - y'(t) = 0. \end{cases}$$

Exercice 6
Dans cet exercice, on cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y). \tag{$\mathcal{E}_1$}$$

1. Donner un exemple d'une telle fonction f.
2. *Analyse.* On considère maintenant une fonction f solution de $(\mathcal{E}_1)$. En dérivant la relation $(\mathcal{E}_1)$ par rapport à x, déduire que f vérifie une équation différentielle du type

$$y'(t) = ay(t)$$

   où $a \in \mathbb{R}$ est une constante à exprimer en fonction de f.
3. Résoudre cette dernière équation différentielle.
4. *Synthèse.* Toutes les fonctions trouvées sont-elles solutions de $(\mathcal{E}_1)$? Conclure.

Exercice 7 (♥)
On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation différentielle

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0. \tag{$\mathcal{E}_2$}$$

1. Cette équation différentielle rentre-t-elle dans le cadre du cours ?
2. *Analyse.* Considérons y une éventuelle solution de $(\mathcal{E}_2)$. On définit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y(e^t).$$

   (a) Montrer que z est deux fois dérivable et calculer z' et z'' en fonction de y' et y''.
   (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera.
   (c) Résoudre cette équation.
   (d) En déduire y.
3. *Synthèse.* Les fonctions trouvées précédemment sont-elles toutes solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_2)$? Conclure.

Exercice 8
On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation différentielle

$$xy''(x) + 2(x + 1)y'(x) + (x + 2)y(x) = 0. \tag{$\mathcal{E}$}$$

Résoudre cette équation en s'inspirant de l'exercice précédent et en effecutant le changement de fonction inconnue

$$z : x \mapsto xy(x).$$