Chapitre 26

Développement limités

Sommaire

26.1 Définitions, notations et premières propriétés

26.1.1 Définitions

I est un intervalle non trivial tel que 0 est un élément de I ou 0 est une borne de I.

Définition 26.1

Soit n un entier naturel et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$,
Dire que f admet un développement limité d'ordre n en 0 signifie qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots a_n$ et une fonction ε de I dans $\mathbb{R}$ tels que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n$$

Au voisinage de 0, la valeur de $f(x)$ est égale à $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ plus un terme négligeable devant x^n.

On dira dans ce cas que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Définition 26.2: Notation o

Au lieu d'écrire à chaque fois :

il existe une fonction ε de I dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n$$

on écrira :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)$$

Remarque 26.1.

- Dire qu'une fonction f est négligeable devant x^n au voisinage de 0 signifie que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0$.
- Notation : f est négligeable devant x^n au voisinage de 0, se note :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^n\right).$$

- Un cas particulier : "$f(x) \underset{x\to 0}{=} o(1)$" signifie que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

A quoi servent les développements limités :

- A calculer des limites.
- On utilise les développements limités lorsque l'on cherche un équivalent d'une somme.
- A déterminer la tangente à une courbe et leurs positions relatives au voisinage d'une valeur.
- Faire une approximation polynomiale d'une fonction.
- Faire un calcul en négligeant les termes "d'ordre" n.

Théorème 26.1: Unicité du développement limité

Si f admet un DL$_n(0)$ alors il est unique.

Remarque 26.2.

- On pourra maintenant parler **du** DL de f à l'ordre n en 0.
- On note DL$_n(0)$ et P s'appelle la **partie régulière** du développement de f en 0 à l'ordre n.

Corollaire 26.1. *Soit f telle que :* $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)$

- *Si f est paire alors : a_1, a_3, ..., $= 0$, les monômes de degré impair sont nuls.*
- *Si f est impaire alors : a_0, a_2, ..., $= 0$, les monômes de degré pair sont nuls.*

26.1.2 Lien avec les équivalents

Propriété 26.1: Notation $\sim$, notation o

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ (attention $a \neq 0$),

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} a\, x^n + o(x^n)$$

si, et seulement si,

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a x^n.$$

Propriété 26.2

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^*$ avec $p < n$, $(a_p, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-p}$ tel que $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$.

- $f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ si, et seulement si $\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right) \underset{x \to 0}{\sim} a_n x^n$
- Si $f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=p}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ alors $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_p x^p$

Exemple 26.1. Avec les équivalents usuels, on obtient notamment

- $\sin(x) =$
- $\exp(x) - 1 =$
- $\ln(1 + x) =$
- $(1 + x)^a - 1 =$
- $\dfrac{1}{1 + x} - 1 =$
- $1 - \cos(x) =$

26.1.3 Lien avec la régularité de f

Théorème 26.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $0 \in I$.
Alors f est dérivable en 0 si et seulement si

$$\exists\, (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + o\,(x)$$

et on a alors : $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

Exemple 26.2. Au voisinage de 0, on peut écrire

- $\sin(x) =$
- $\exp(x) =$
- $\ln(1 + x) =$

- $(1+x)^a =$

- $\dfrac{1}{1+x} =$

26.1.4 "Règles de calcul" sur les DL. Opérations.

Propriété 26.3

- Pour $0 < p < n$, $\quad x^n \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$
- Pour $(p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que : $n+p > 0 \qquad x^n o(x^p) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+p})$

  Plus précisément : si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$ alors $x^n f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+p})$.
- Pour n et p deux entiers naturels , $\quad o(x^n) + o(x^p) \underset{x\to 0}{=} o(x^{\min(p,n)})$

  Plus précisément : si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$ alors $f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{\min(p,n)})$.
- Pour n et p deux entiers naturels , $\quad o(x^n) \times o(x^p) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+p})$

  Plus précisément : si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$ alors $f(x)\times g(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+p})$.
- Pour $0 < p < n$, si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$.

  Quand dans une somme il y a plusieurs $o(x^n)$ on ne conserve que celui avec l'exposant le plus petit.

  Quand dans une somme il y a un $o(x^n)$ on peut supprimer tous les x^p avec $p > n$.

Exemple 26.3.

26.2 La formule de Taylor-Young

Théorème 26.3: Taylor-Young

Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o(x^n)$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + o(x^n)$$

26.3 Les développements limités usuels

Les développements limités suivants en 0 sont appelés développements limités usuels et sont à connaître.

Théorème 26.4

- $$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$
- $$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
- $$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
- $$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
- $$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
- $$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
- $$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

26.4 Primitivation d'un DL

I est un intervalle non trivial contenant 0.

Théorème 26.5

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et $n \in \mathbb{N}$,
Si

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

alors

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}).$$