Chapitre 28

Géométrie

La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses.
René Descartes

Sommaire

28.1 Produit scalaire

Définition 28.1: Produit scalaire canonique

Soit $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$. On définit le produit scalaire (canonique) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou bien $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou encore $(\vec{u}|\vec{v})$ voire $\langle \vec{u}|\vec{v} \rangle$, par

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy'$$

Dans ce cours on adoptera la notation $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
Pour $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$ on définit

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy' + zz'$$

Exemple 28.1.

- Dans le plan $\mathcal{P}$, si $\vec{u} = (2,5)$ et $\vec{v} = (-1,3)$ alors $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \dots$
- Dans l'espace $\mathcal{E}$, si si $\vec{u} = (2,5,-1)$ et $\vec{v} = (-1,3,2)$ alors $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \dots$

Propriété 28.1: Propriétés du produit scalaire

Le produit scalaire est

— bilinéaire :

$$\forall\,(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in\vec{\mathcal{A}}^3,\quad \forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\qquad \begin{cases}\langle\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},\vec{w}\rangle=\lambda\langle\vec{u},\vec{w}\rangle+\mu\langle\vec{v},\vec{w}\rangle\\ \langle\vec{u},\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}\rangle=\lambda\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+\mu\langle\vec{u},\vec{w}\rangle\end{cases}$$

En particulier on a

$$\forall\,\vec{u}\in\vec{\mathcal{A}},\qquad \langle\vec{u},\vec{0}\rangle=\langle\vec{0},\vec{u}\rangle=0$$

— symétrique :

$$\forall\,(\vec{u},\vec{v})\in\vec{\mathcal{A}}^2,\qquad \langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\langle\vec{v},\vec{u}\rangle$$

— défini :

$$\forall\,\vec{u}\in\vec{\mathcal{A}},\qquad \langle\vec{u},\vec{u}\rangle=0\qquad \text{si et seulement si } \vec{u}=\vec{0}$$

— positif :

$$\forall\,\vec{u}\in\vec{\mathcal{A}},\qquad \langle\vec{u},\vec{u}\rangle\geqslant 0$$

Définition 28.2: Norme euclidienne

Soit $\vec{u}\in\vec{\mathcal{A}}$. On définit la norme (euclidienne) de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, par

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}$$

Un vecteur $\vec{u}$ sera dit normé si $\|\vec{u}\|=1$.

Remarque 28.1. Si $\mathcal{A}$ est le plan $\mathbb{R}^2$ ou l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère usuel alors $\|\vec{AB}\|$ mesure la distance (au sens de la distance usuelle) du segment $[AB]$.

Exemple 28.2. Si $\vec{u}=(-1,2)$ alors

Propriété 28.2: Propriétés de la norme

Soit $(\vec{u},\vec{v})\in\vec{\mathcal{A}}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors

- $\|\lambda\vec{u}\|=|\lambda|\|\vec{u}\|$,
- $\|\vec{u}\|\geqslant 0$
- $\|\vec{u}\|=0$ si et seulement si $\vec{u}=\vec{0}$,
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$.
- On a les identités suivantes, dites de polarisation

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

Théorème 28.1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{A}}^2$. On a alors
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

Théorème 28.2: Inégalité triangulaire

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{A}}^2$. On a alors
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Exemple 28.3. Par exemple dans le plan $\mathcal{P}$, si ...

Définition 28.3: Orthogonalité

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{A}}^2$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit orthogonaux si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

Théorème 28.3: de Pythagore

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{A}}^2$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Dans le cas où $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ muni de son repère usuel ces notions et résultats peuvent s'interpréter en terme d'angle

Propriété 28.3: Calcul du produit scalaire à l'aide du cosinus

On se place dans le particulier où $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ muni de son repère usuel.
Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{A}}^2$. On a alors
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$$

Remarque 28.2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont alors orthogonaux si et seulement si $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si
$$\widehat{\vec{u}, \vec{v}} \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 28.1. On considère trois points du plan $\mathcal{P}$ A, B et C tels que $AB = 7$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \pi/6$. Calculer $\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle$.

28.2 Droites du plan

28.2.1 Vecteur directeur, représentation paramétrique

Définition 28.4: Droite du plan

Une partie $\mathcal{D}$ non-vide de $\mathcal{P}$ est appelée une droite s'il existe $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}} \setminus \{\vec{0}\}$ tel que

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} \;,\; \exists t \in \mathbb{R} \;,\; \vec{AM} = t\vec{u}\}$$

où A est un point quelconque fixé de $\mathcal{D}$.
On dit alors que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Remarque 28.3. Une droite admet toujours une infinité de vecteurs directeurs, en effet, si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Plus précisément deux vecteurs sont deux vecteurs directeurs de la même droite si et seulement si ils sont colinéaires.

Propriété 28.4

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$. Alors $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Définition 28.5

- Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites sécantes si $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset$
- Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites perpendiculaires si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Propriété 28.5: Représentation paramétrique d'une droite

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $A \in \mathcal{D}$. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$.
Alors $M(x, y) \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AM} = t\vec{u}$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t y_{\vec{u}} \end{cases}$$

Ainsi

$$\mathcal{D} = \{(x_A + t x_{\vec{u}}, y_A + t y_{\vec{u}}) \;,\; t \in \mathbb{R}\}$$

On appelle une telle écriture une *représentation paramétrique de* $\mathcal{D}$.

Remarque 28.4. Une droite admet une infinité de représentations paramétriques. En effet celle-ci dépend du point choisi et du vecteur directeur choisi et on a une infinité de choix pour ces deux éléments.

Moralement une droite est caractérisée de manière unique par la donnée

— d'un point de la droite

— d'un vecteur directeur

Exemple 28.4. Soit D la droite du plan passant par le point A de coordonnées $(2, 3)$ et admettant pour vecteur directeur $\vec{u} = (-1, 2)$. Alors une représentation paramétrique de D est donnée par

28.2.2 Vecteur normal, équation cartésienne d'une droite

Définition 28.6

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan $\mathcal{P}$ et soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Soit $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}} \setminus \{\vec{0}\}$.
On dit que $\vec{v}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire, si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.
De manière équivalente $\vec{v}$ est normal à $\mathcal{D}$ si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{D}, \quad \langle \vec{AB}, \vec{v} \rangle = 0$$

Remarque 28.5. Une droite admet une infinité de vecteurs normaux, en effet, si $\vec{v}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{v}$ est un vecteur normal à de $\mathcal{D}$.

Propriété 28.6: Equation cartésienne d'une droite

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, $A \in \mathcal{D}$ et $\vec{v}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$ de coordonnées (a, b).
Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \text{ si, et seulement si, } ax + by = ax_A + by_A.$$

Notons $c = ax_A + by_A$. On a alors

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad ax + by = c.$$

L'équation $ax + by = c$ est appelée une *équation cartésienne* de la droite $\mathcal{D}$.

Remarque 28.6. Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes. En effet celle-ci dépend du point choisi et du vecteur normal choisi et on a une infinité de choix pour ces deux éléments.

Une droite $\mathcal{D}$ est ainsi caractérisée de manière unique par la donnée de

— Un point de $\mathcal{D}$,

— Un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Définition 28.7

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by = c$. Si $a \neq 0$ on peut mettre cette équation sous la forme

$$y = \rho x + d$$

On appelle alors ρ le coefficient directeur ou la pente de $\mathcal{D}$ et d l'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$.

Remarque 28.7. Si $\vec{u}(\alpha, \beta)$ dirige $\mathcal{D}$ et $\alpha \neq 0$ alors $\frac{\beta}{\alpha}$ est le coefficient directeur de $\mathcal{D}$.

Exercice 28.2. Soit $A(2,4)$ et $B(-1,5)$

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB). La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\vec{AB} = -3\vec{i} + \vec{j}$. Ainsi le vecteur $\vec{n} = \vec{i} + 3\vec{j}$ est normal à la droite (AB). La droite (AB) admet donc une équation cartésienne de la forme $x + 3y = c$. Il nous reste à déterminer c. On sait que $A \in (AB)$, ainsi $x_A + 3y_A = c$, c'est-à-dire $c = 14$. Finalement (AB) admet pour équation cartésienne l'équation $x + 3y = 14$.
2. Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la médiatrice du segment $[AB]$ La médiatrice M du segment $[AB]$ est perpendiculaire à (AB). Ainsi $\vec{AB}$ est un vecteur normal à M. M admet alors une équation cartésienne de la forme $-3x + y = c'$. Pour déterminer c' il nous faut un point de M. Le milieu $I\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ de $[AB]$ appartient à M. Ainsi $c = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 3$ M admet donc pour équation cartésienne l'équation $-3x + y = 3$. Un vecteur directeur de M est le vecteur $\vec{n} = \vec{i} + 3\vec{j}$. On en déduit une représentation paramétrique de M

$$M = \left\{ \left(-\frac{1}{2} + t, \frac{9}{2} + 3t \right) \ , \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

28.3 Cercles du plan

Définition 28.8

Soit $\Omega \in \mathcal{P}$ et $r > 0$. On appelle cercle de centre Ω et de rayon r, l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ sis à une distance égale à R du point Ω. C'est-à-dire

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \ , \ \|\vec{\Omega M}\| = R\}$$

Théorème 28.4: Équation cartésienne d'un cercle

Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega) \in \mathcal{P}$ et $R > 0$.
Le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

On appelle l'équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Remarque 28.8. Une équation de cercle est donc de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$.

En développant on aboutit à une équation de la forme $x^2 + 2x_\Omega x + y^2 + 2y_\Omega y = R^2 - x_\Omega^2 - y_\Omega^2$, c'est-à-dire de la forme $x^2 + ax + y^2 + by = \rho$ avec $(a, b, \rho) \in \mathbb{R}^3$.

Face à une équation de la forme $x^2 + ax + y^2 + bx = \rho$ on va utiliser la mise sous forme canonique pour revenir à une équation de cercle plus lisible.

Exemple 28.5. Caractériser les figures géométriques caractérisées par les équations cartésiennes suivantes :

— $E_1 : x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0$.

— $E_2 : x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 0$

— $E_3 : x^2 - 6x + y^2 - 2y + 12 = 0$

Propriété 28.7: Aire et périmètre du cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon $R \geqslant 0$ et $\mathcal{D}$ le disque associé. L'aire de $\mathcal{D}$ vaut πR^2 et le périmètre de $\mathcal{C}$ vaut $2\pi R$.

28.4 Projection orthogonale, distance à une droite

Théorème 28.5

Soit M un point et $\mathcal{F}$ une droite du plan.
Il existe un unique point $H \in \mathcal{F}$ tel que

$$\forall B \in \mathcal{F}, \qquad \langle \vec{HM}, \vec{HB} \rangle = 0$$

On appelle ce point le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$.

Définition 28.9

Soit M un point et $\mathcal{F}$ une droite du plan. On définit la distance de M à $\mathcal{F}$, notée $d(M, \mathcal{F})$ par

$$d(M, \mathcal{F}) = \inf_{N \in \mathcal{F}} \|\vec{MN}\|$$

Il s'agit donc de la borne inférieure des distances entre M et un point de $\mathcal{F}$.

Théorème 28.6

Soit M un point et $\mathcal{F}$ une droite du plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$.
Le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{F}$ est l'unique point qui réalise la distance de M à $\mathcal{F}$, c'est-à-dire

$$d(M, \mathcal{F}) = \|\vec{MH}\|$$

Remarque 28.9. Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$ est ainsi le point de $\mathcal{F}$ le plus proche de M.

Comment déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan ? C'est en fait assez simple :

Propriété 28.8

Soit $M \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ une droite ou un plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$.
H est l'intersection de $\mathcal{F}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathcal{F}$ passant par M.

Exercice 28.3. Dans le plan, considérons les points $A(0,0)$ et $B(2,2)$, ainsi que M le point de coordonnées $M(0,2)$.

1. Représenter les points A, B et M dans le plan.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur (AB). Calculer la distance de M à (AB).