Chapitre 3

Le principe de récurrence

Sommaire

3.1 La récurrence simple

Dans ce court chapitre nous étudions le principe de récurrence. Ce principe permet d'effectuer un raisonnement par récurrence, ce qui permet de démontrer des propriétés sur des nombres entiers successifs. Cette méthode de raisonnement s'appuie sur le théorème suivant, qui repose sur les propriétés de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Théorème 3.1: Principe de récurrence simple

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$.
Si la propriété $P(0)$ est vraie et si pour tout entier $n \geq 0$ l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Exemple 3.1 (Un premier exemple, pour une suite géométrique). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et par la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4u_n.$$

Montrons en utilisant le principe de récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 3 \times 4^n.$$

Exemple 3.2 (Une suite arithmétique). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et par la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3 + u_n.$$

Montrons en utilisant le principe de récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 + 3n.$$

Méthode 3.1: Rédiger proprement et efficacement une preuve par récurrence simple

- Nommer la propriété que l'on cherche à démontrer, et annoncer que l'on s'apprête à effectuer une preuve par récurrence :
  Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété

  $$P(n): \quad \ldots$$

  Prouvons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
- Initialiser la propriété, c'est-à-dire vérifier que la propriété $P(0)$ est vraie.
  Initialisation : *Pour $n = 0$, on a ...*
  Ainsi $P(0)$ est vraie.
- Prouver l'hérédité de la propriété, c'est-à-dire montrer que pour tout entier n, $P(n)$ implique $P(n+1)$.
  Hérédité : *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie.*

  $$\ldots$$

  Ainsi $P(n+1)$ est vraie. On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
- Conclure en utilisant le principe de récurrence.
  Ainsi d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.1. Le principe de récurrence simple se généralise au cas où la propriété n'est pas initialisée au rang 0 mais à un rang supérieur $n_0 \in \mathbb{N}$. Ceci nous donne le théorème suivant.

Théorème 3.2: Principe de récurrence simple, initialisé à un rang $n_0 \in \mathbb{N}$

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si la propriété $P(n_0)$ est vraie et si pour tout entier $n \geq n_0$ l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice 3.1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

Expliciter la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 3.2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$. Noter que la propriété est vraie pour $n \leq 2$, héréditaire dès $n = 3$ mais fausse pour $n = 3$.

Exercice 3.3. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $2^n \geq 4n$. Noter que la propriété est vraie pour $n = 0$, héréditaire pour $n \geq 1$, mais fausse malgré tout pour $n = 1, 2, 3$.

Exercice 3.4. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Remarque 3.2. On peut être amené à initialiser une récurrence à un rang > 0, comme par exemple pour prouver la propriété

$$\forall n \geq 2, \quad 2^n > n + 1.$$

Remarque 3.3. Dans une démonstration par récurrence, l'initialisation est une étape tout aussi importante que l'hérédité ! Par exemple la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 10^n + 1 \text{ est un multiple de } 9$$

est héréditaire mais est fausse (il n'y a pas d'initialisation possible).

Parfois, l'initialisation d'une seule variable ne suffit pas, notamment lorsque la propriété au rang $n+1$ dépend de la propriété aux rangs n et $n-1$. On utilise alors le principe de récurrence double.

3.2 Le principe de récurrence double

Théorème 3.3: Le principe de récurrence double

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit un entier $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies et si pour tout entier $n \geq n_0$ l'implication $(P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice 3.5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.$$

Remarque 3.4. Le principe de récurrence double est un principe de récurrence d'ordre 2.

On peut de manière générale effectuer des récurrences d'ordre $k \geq 1$, pour tout entier naturel k.

Enfin, on peut effectuer un raisonnement par récurrence forte.

3.3 Le principe de récurrence forte

Théorème 3.4: Principe de récurrence forte

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit un entier $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n_0)$ est vraie et si pour tout entier $n \geq n_0$ l'implication $(\forall k \leq n,\ P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice 3.6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $x_n = 2^{n-1}$.