TD$_4$ Trigonométrie

Conseil valable pour la majorité des exercices : ne pas hésiter à tracer et à se servir du cercle trigonométrique !

1 Formules et cercle trigonométrique

Exercice 1 (∘∘∘)
Calculer, lorsque c'est possible, le cosinus, le sinus et la tangente de

- $\frac{2\pi}{3}$,
- 7π,
- $\frac{-8\pi}{3}$,
- $\frac{5\pi}{4}$,
- $\frac{19\pi}{6}$,
- $\frac{31\pi}{2}$.

Exercice 2 (•∘∘)
Calculer les expressions suivantes

- $\cos^2\left(-\frac{\pi}{13}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{13}\right)$,
- $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$,
- $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos(-\pi)$,
- $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$,
- $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

Exercice 3 (•∘∘)
Soit $x\in\mathbb{R}$. Simplifier l'expression

$$\sin(-x)+\cos(\pi+x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Exercice 4 (•∘∘)
Donner le signe de

- $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$,
- $\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$,
- $\tan\left(\frac{13\pi}{5}\right)$.

Exercice 5 (•••)
Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Le but de l'exercice est de calculer le produit

$$S_n=\cos(x)\times\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{4}\right)\times\cdots\times\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

noté à l'aide du symbole $\prod$ sous la forme

$$S_n=\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

1. Calculer S_0, puis calculer $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\times S_1$ ainsi que $\sin\left(\frac{x}{2^2}\right)\times S_2$.
2. Calculer $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\times S_n$ et en déduire une expression simple de S_n.

Exercice 6 (•••)
Le but de cet exercice est de calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $t^2+2\sqrt{3}\,t-1=0$.

2. En utilisant la formule $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ pour un réel x judicieusement choisi, montrer que $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ est solution de l'équation de la question précédente.
3. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
4. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 7 (• • •)
Le but de cet exercice est de calculer $x = \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

1. Donner le signe de x et de y.
2. Montrer que $x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Donner une autre relation vérifiée par x^2 et y^2.
4. Déduire de ce qui précède la valeur de x et de y.

2 Équations trigonométriques

Exercice 8 (• ◦ ◦)
Dans chacun des cas suivants, donner un réel x vérifiant

1. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   - avec $x \in [0, \pi]$,
   - avec $x \in [-\pi, 0]$.
2. $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$
   - avec $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$,
   - avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 9 (• • ◦)
Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ puis donner les solutions appartenant à $[0, 2\pi]$:

1. $\cos x = \dfrac{1}{2}$,
2. $\sin x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$,
3. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$,
4. $|\tan x| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 10 (• • ◦)
Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ puis donner les solutions appartenant à $[0, 2\pi]$:

1. $2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$,
2. $\cos 5x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$,
3. $\cos 3x = \sin x$,
4. $\sin 5x = \cos x$.

Exercice 11 (• • •)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos x + \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
2. $\cos^2(x) - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\cos(x) + \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 0$,
3. $\sin^2(x) + 3\cos x - 1 = 0$,
4. $2\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$,
5. $\sin^2\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

3 Trigonométrie réciproque

Exercice 12 (• ◦ ◦)
Calculer les valeurs suivantes :

1. $\arcsin(\sin(\pi))$,
2. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$,
3. $\arctan(\tan(3\pi))$,
4. $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Exercice 13 (•∘∘)
Déterminer les valeurs de

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$,
2. $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$,
3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,
4. $\arctan(1)$,
5. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$,
6. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercice 14 (•••)
Le but de cet exercice est de simplifier les expressions $\sin(\arccos x)$ pour $x \in [-1,1]$, $\tan(\arcsin y)$ pour $y \in]-1,1[$ et $\cos(\arctan z)$ pour $z \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que : $\forall\, t \in [0,\pi]$, $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$.
   (b) En déduire que : $\boxed{\forall\, x \in [-1,1],\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.}$
2. (a) En utilisant le même procédé que la question 1., montrer que : $\boxed{\forall\, x \in [-1,1],\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.}$
   (b) $\tan(\arcsin x)$ est-il bien défini pour $x \in \{-1,1\}$?
   (c) En déduire que : $\boxed{\forall\, x \in]-1,1[,\ \tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.}$
3. (a) Montrer que pour tout $\forall\, t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $1+\tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.
   (b) Montrer que : $\forall\, t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$.
   (c) En déduire que : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.}$