Chapitre 6

Sommes et produits

Sommaire

6.1 Les sommes

6.1.1 Le symbole Σ

Définition 6.1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\sum_{k=0}^{n} a_k$$

la somme $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Ce symbole se lit « somme des a_k pour k allant de 0 à n ». On dit que a_k est le terme général de la somme et k l'indice de sommation.
Plus généralement, pour p entier, on pourra considérer des sommes de la forme

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n.$$

Par convention, si $p > n$, la somme est vide et $\sum_{k=p}^{n} a_k = 0$.

Remarque 6.1.
- Le symbole $\sum$ est la lettre grecque *sigma* majuscule.
- Le choix de la lettre pour l'indice de sommation n'a pas d'importance. Avec les mêmes notations que dans la définition, on dit que k est une variable muette :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

Remarque 6.2. La quantité

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

est en fait définie par récurrence :

- On a

$$S_{-1} = \sum_{k=0}^{-1} a_k = 0$$

(l'ensemble de sommation est vide).
- Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n.$$

Exemple 6.1.
1. La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ représente la somme des $n+1$ premiers entiers naturels.
2. Pour tout nombre réel c, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c$ représente la somme de n termes de la suite constante dont le terme égale c, et vaut donc $n \times c$.

Exercice 6.1. Ecrire les quantités suivantes sans le symbole $\sum$:

1. $\sum_{j=2}^{5} \frac{2^j}{j}$
2. $\sum_{k=0}^{2} (k-1)^k$

Exercice 6.2 (Indices pairs et impairs). Ecrire les quantités suivantes sans le symbole $\sum$:

1. $\sum_{m=0}^{n} b_{2m}$
2. $\sum_{m=0}^{n} c_{2m+1}$

Exercice 6.3 (Alternance de signes). Ecrire la quantités suivantes sans le symbole $\sum$:

$$\sum_{m=1}^{5} \frac{(-1)^k}{k}$$

Remarque 6.3. Attention en général pour $k \in \mathbb{N}$, $(-1)^k \neq -1^k$. $(-1)^k = 1$ si k est pair, -1 sinon.

Exercice 6.4 (Nombres de termes). Ecrire les quantités suivantes sans le symbole $\sum$:

1. $\sum_{k=0}^{n} 1$
2. $\sum_{j=1}^{n} 1$

Remarque 6.4. Important! La somme $\sum_{k=p}^{n} a_k$ contient $n-p+1$ termes si $n > p$.

Exercice 6.5. Écrire les sommes suivantes avec symbole $\sum$:

1. $1+2+3+\cdots+100$
2. $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{51}$
3. $1-2+3-4+5-\cdots+89-90$

6.1.2 Un premier exemple : la somme de Gauss

Théorème 6.1: La somme de Gauss

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la somme des n premiers entiers naturels vaut

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

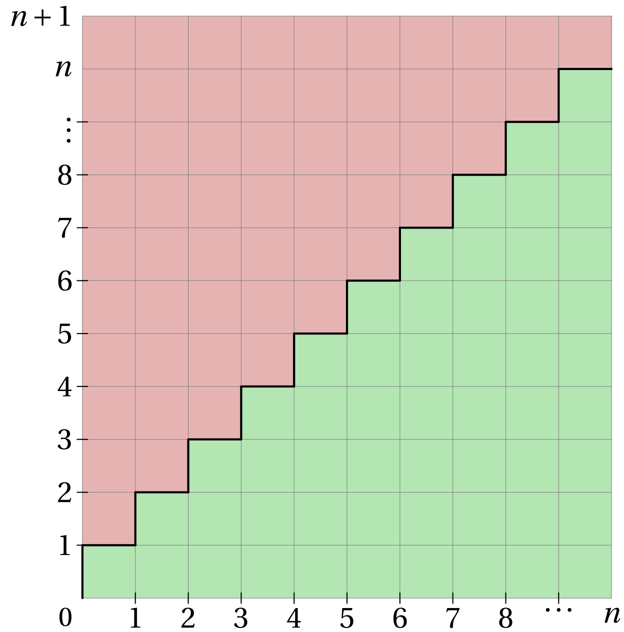

FIGURE 6.1 – Illustration géométrique de la somme de Gauss. Le nombre de carrés verts est égal, par définition, à la somme de Gauss. Ce nombre est égal à la moitié de l'aire du rectangle de côtés n et $n+1$.

Remarque 6.5. La preuve la plus rigoureuse de cette formule est la preuve par récurrence.

Exemple 6.2. A l'aide de la formule précédente, calculer

$$\sum_{k=0}^{1000} k \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{100} 2j$$

6.1.3 Propriétés

Nous disposons des propriétés suivantes concernant la manipulation du symbole de sommation.

Propriété 6.1 (Linéarité de la somme)**.** *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de nombres réels, alors*

- *On peut regrouper deux sommes quand les indices de sommation sont les mêmes : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k).$$

- *La multiplication par un nombre est distributive sur la somme : si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

$$\lambda \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda u_k.$$

Remarque 6.6. 1. La manipulation ci-dessus n'est possible quand les indices de sommation coïncident. Il peut-être pratique d'isoler ou de regrouper des termes de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n.$$

2. Attention à ne pas tenter de factoriser par des termes dépendant de k, ce qui n'aurait pas de sens.
3. De manière générale, usez autant que possible de bon sens et évitez les manipulations impossibles. Par exemple

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k \neq \sum_{k=0}^{n} u_k \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Propriété 6.2 (Relation de Chasles)**.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, $m \in \mathbb{N}$. On a*

$$\sum_{k=0}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Exercice 6.6. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} (2k+1)$,
2. $\displaystyle\sum_{k=10}^{n} k$, avec $n \geq 10$,
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{50} \frac{1}{i} - \sum_{k=3}^{52} \frac{1}{k}$.

6.1.4 Les sommes de référence

Dans cette partie, nous donnons et nous démontrons la valeur de plusieurs sommes de référence, à connaître. Ces sommes de référence constituent en quelque sorte les briques de base auxquelles il faudra souvent se ramener pour calculer d'autres sommes plus complexes.

Remarque 6.7. Une méthode générale pour prouver une formule donnant la valeur d'une somme est d'utiliser un raisonnement par récurrence. La méthode générale consiste, lors de l'hérédité pour passer du rang $n \in \mathbb{N}$ au rang $n+1$ à isoler le dernier terme de la somme; c'est-à-dire à utiliser la définition de la somme par récurrence donnée dans la remarque 6.2.

Exemple 6.3. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Théorème 6.2 (Somme arithmétique, somme de Gauss)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Théorème 6.3 (Somme géométrique)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $q \in \mathbb{R}$, si $q \neq 1$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1, \\ n+1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Remarque 6.8. On peut également prouver cette formule en utilisant un raisonnement par récurrence.

Remarque 6.9. Plus généralement, si $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, n et $m \in \mathbb{N}$ avec $n \leq m$, on a

$$\sum_{k=n}^{m} q^k = \frac{q^n - q^{m+1}}{1-q} = \frac{\text{premier terme} - \text{premier terme non écrit}}{1 - \text{raison}}$$

et si $q = 1$

$$\sum_{k=n}^{m} q^k = n - m + 1.$$

Exercice 6.7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

1. $\sum_{k=0}^{10} 2^k$,
2. $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j}$,
3. $\sum_{m=0}^{n} (-1)^m$.

Théorème 6.4 (Les sommes d'Euler)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Théorème 6.5 (Formule de Bernoulli)
Soient a et $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

Remarque 6.10.

- C'est une généralisation de la troisième identité remarquable.
- A retenir : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
- Pour retenir cette formule, il faut que les deux membres s'annulent quand $a = b$ et les puissances de a et b dans la somme somment toujours à n.

6.1.5 Somme des termes d'une suite arithmétique

Théorème 6.6: Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors, pour $m, n \in \mathbb{N}$, avec $m \leq n$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1)u_m + \frac{(n-m)(n-m+1)r}{2} = \frac{(u_m+u_n)(n-m+1)}{2}.$$

et en particulier

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)r}{2} = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}.$$

Remarque 6.11. On retient souvent la première formule grâce au moyen mnémotechnique suivant :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{(u_m+u_n)(n-m+1)}{2} = \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}.$$

Exercice 6.8. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme -2 et de raison $\frac{3}{4}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{20} u_k.$$

6.1.6 Somme des termes d'une suite géométrique

Théorème 6.7: Sommes géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$, m et $n \in \mathbb{N}$, avec $m \leq n$. Alors si $q \neq 1$

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q} = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$$

et en particulier

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Théorème 6.8: Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors, pour $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} = \frac{u_m - u_{n+1}}{1-q}.$$

Et en particulier

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}.$$

Remarque 6.12. Si la raison q vaut 1 alors on additionne simplement $n-m+1$ fois le même terme, u_0.

Exercice 6.9. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3. Calculer

$$\sum_{k=0}^{15} u_k.$$

6.1.7 La méthode du changement d'indice

Le changement d'indice consiste à renuméroter les termes d'une somme pour simplifier son expression.

Exercice 6.10. Écrire sans signe $\sum$ la somme

$$\sum_{j=2}^{10} (j-1).$$

Que remarque-t-on ?

Pour changer d'indice de sommation dans la somme

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

on pose par exemple $k' = k + p \Leftrightarrow k = k' - p$, on calcule les bornes minimales et maximales atteintes par le nouvel indice k' et on obtient

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k'=m+p}^{n+p} a_{k'-p} = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}.$$

Exercice 6.11. 1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, on a

$$\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}.$$

Les sommes dites téléscopiques peuvent se calculer facilement avec la propriété suivante.

Propriété 6.3 (Sommes téléscopiques)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité*

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

On dit que la somme ci-dessus est téléscopique.

Exercice 6.12. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right),$$

en déduire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

(Cf la section sommes et récurrence)

Exercice 6.13. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

Exercice 6.14. En se ramenant à une somme téléscopique, retrouver la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique.

6.1.8 Calcul de sommes en Python

6.2 Les produits

6.2.1 Le symbole $\prod$

Définition 6.2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\prod_{k=0}^{n} a_k$$

le produit $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$. Ce symbole se lit « produit des a_k pour k allant de 0 à n ». On dit que a_k est le terme général du produit et k l'indice.
Plus généralement, pour p entier, on pourra considérer des produits de la forme

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_n.$$

Par convention, si $p > n$, le produit est vide et $\prod_{k=p}^{n} a_k = 1$.

Remarque 6.13.

- Le symbole $\prod$ est la lettre grecque *pi* majuscule.
- Le choix de la lettre pour l'indice de sommation n'a pas d'importance. Avec les mêmes notations que dans la définition, on dit que k est une variable muette :

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \prod_{j=0}^{n} a_j.$$

- Lorsqu'une somme est vide, elle vaut 0, cela correspond à l'élément neutre pour +. En effet, additionner 0 ne change pas la valeur d'un nombre. De même, lorsqu'un produit est vide, il vaut l'élément neutre de ×, c'est-à-dire 1 car si on multiplie un nombre par 1, il est inchangé. Parfois, l'utilisation d'une somme ou d'un produit vide peut simplifier l'expression de certaines propriétés en évitant de traiter des cas particuliers à part.

Remarque 6.14. De même que pour les sommes (voir remarque 6.2), la quantité

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$$

est en fait définie par récurrence :

- On a
$$P_{-1} = \prod_{k=0}^{-1} a_k = 1$$
(l'ensemble des indices est vide).
- Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k = \left(\prod_{k=0}^{n-1} a_k\right) \times a_n = a_n \times P_{n-1}.$$

Exemple 6.4. Si $a \in \mathbb{R}$ et si $n \in \mathbb{N}$, alors $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a = a^{n+1}$. Preuve par récurrence.

Propriété 6.4 (Relation de Chasles)**.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, m, n et p trois entiers avec $m \leq n \leq p$. Alors*

$$\left(\prod_{k=m}^{n-1} a_k\right) \times \left(\prod_{k=n}^{p} a_k\right) = \left(\prod_{k=m}^{p} a_k\right)$$

6.2.2 La factorielle

Définition 6.3: La factorielle de n : $n!$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k,$$

que l'on lit « factorielle n », et par convention (produit vide) $0! = 1$.

Exemple 6.5.
- Calcul des premières valeurs de la factorielle :
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

Exercice 6.15. Rappel sur les boucles `for` : comment implémenter la fonction factorielle en Python ?

6.2.3 Propriétés

Propriété 6.5. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de nombres réels, $m \leq n$ deux entiers, alors*

- *(Multiplicativité) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,*

$$\prod_{k=m}^{n} u_k \times \prod_{k=m}^{n} v_k = \prod_{k=m}^{n} (u_k \times v_k).$$

- *(Passage à la puissance) Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors*

$$\prod_{k=m}^{n} a_k^{\alpha} = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^{\alpha}.$$

- *(Constante) Si $c \in \mathbb{R}$, alors*

$$\prod_{k=m}^{n} ca_k = c^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

Remarque 6.15. Attention le produit n'est pas linéaire ! Autrement dit il n'est pas vrai que

$$\prod_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \prod_{k=0}^{n} a_k + \mu \prod_{k=0}^{n} b_k.$$

Revenez à la définition si vous avez un doute !

Exemple 6.6. Calculer

$$\prod_{p=1}^{n} (2p), \quad \prod_{k=1}^{n} 3\sqrt{k}k, \quad \prod_{j=1}^{n} e^j.$$

Remarque 6.16. Les changements d'indice se réalisent de la même façon qu'avec les sommes.

Propriété 6.6 (Produit téléscopique)**.** *Si (a_k) est une suite de termes tous non nuls, alors*

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Exercice 6.16. Calculer

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k}$$

6.2.4 Calcul de produits et calcul de la factorielle en Python

6.3 La formule du binôme de Newton

6.3.1 Les coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux ont été rencontrés au lycée en probabilité. Nous les définissons ici à l'aide de la factorielle. Nous reverrons dans les chapitres concernés leur interprétation combinatoire et probabiliste.

Définition 6.4. Soit $n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$. On définit

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On lit k parmi n. Par convention, si $k > n$, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Remarque 6.17. $\binom{n}{k}$ représente le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Exemple 6.7. Par exemple $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$, $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{12} = 10$.

Propriété 6.7. *Soient n et k deux entiers, avec $k \leq n$. On a*

- $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)}{k!}$
- *Valeurs remarquables :* $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ *et* $\binom{n}{1} = \binom{n}{1} = n$.
- *Formule sans nom, pour $k \neq 0$:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Propriété 6.8 (Triangle de Pascal)**.** *Soient n, k deux entiers. On a*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Cette propriété très importante nous donne la représentation suivante, appelée triangle de Pascal

Théorème 6.9
Les coefficients binomiaux sont des entiers.

$$\binom{0}{0}=1$$

$$\binom{1}{0}=1 \qquad \binom{1}{1}=1$$

$$\binom{2}{0}=1 \qquad \binom{2}{1}=2 \qquad \binom{2}{2}=1$$

$$\binom{3}{0}=1 \qquad \binom{3}{1}=3 \qquad \binom{3}{2}=3 \qquad \binom{3}{3}=1$$

$$\binom{4}{0}=1 \qquad \binom{4}{1}=4 \qquad \binom{4}{2}=6 \qquad \binom{4}{3}=4 \qquad \binom{4}{4}=1$$

$$\binom{5}{0}=1 \qquad \binom{5}{1}=5 \qquad \binom{5}{2}=10 \qquad \binom{5}{3}=10 \qquad \binom{5}{4}=5 \qquad \binom{5}{5}=1$$

$$\binom{6}{0}=1 \qquad \binom{6}{1}=6 \qquad \binom{6}{2}=15 \qquad \binom{6}{3}=20 \qquad \binom{6}{4}=15 \qquad \binom{6}{5}=6 \qquad \binom{6}{6}=1$$

FIGURE 6.2 – Le triangle de Pascal, construit à partir de la relation du triangle de Pascal.

6.3.2 Enoncé et démonstration de la formule du binôme

Nous démontrons enfin la formule du binôme de Newton en utilisant un raisonnement par récurrence. Cette formule est très importante et doit être connue.

Théorème 6.10: La formule du binôme de Newton

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Remarque 6.18. Pour $n=2$, on retrouve les deux identités remarquables bien connues.

Exemple 6.8. On a $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ et $(1+x)^4 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ pour tous $a, b, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.17. Montrer que pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k} = (-2)^n.$$