# Chapitre 7

# Fonctions usuelles

**Sommaire**



Dans ce chapitre, nous étudions les propriétés des fonctions usuelles, et nous nous intéressons à l'étude de fonctions : en particulier l'obtention de tableaux de variations permet d'avoir une connaissance précise du comportement d'une fonction.

# 7.1 Généralités sur les fonctions

## 7.1.1 Vocabulaire

**Définition 7.1**

- On dit que $f$ est une fonction de la variable réelle s'il existe un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et un sous-ensemble $B \subset \mathbb{R}$ tels que à chaque $x \in A$ correspondre un nombre réel $f(x) \in B$.
- On dit que $A$ est l'ensemble de définition de $f$, on dit aussi que $f$ est définie sur l'ensemble $A$. On note parfois $A = D_f$.
- On dit que $B$ est l'ensemble d'arrivée de $f$, ou que $f$ est à valeurs dans l'ensemble $B$.

**Définition 7.2.** Dans ce contexte, on note

$$\boxed{f : \begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{array}}$$

la fonction $f$, ou encore $x \mapsto f(x)$ s'il n'y a aucune ambiguïté sur le domaine de définition de $f$.

*Remarque* 7.1. Il est très important de distinguer les réels $x$ et $f(x)$ et la fonction $f$. $x$ et $f(x)$ sont des nombres, $f$ est une fonction!

*Exemple* 7.1. La fonction

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{array}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

*Remarque* 7.2. Pour étudier une fonction, la première chose à faire est d'étudier son domaine de définition!

*Exemple* 7.2.

1. Soit $f$ la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

2. Soit $g$ la fonction définie par
$$g(x) = \frac{e^x}{x^2-1}.$$

3. Soit $h$ la fonction définie par
$$h(x) = \ln(x^2+3x+2).$$

4. Soit $k$ la fonction définie par
$$k(x) = \sqrt{e^x-1}.$$

### 7.1.2 Opérations sur les fonctions

**Les opérations arithmétiques**

Dans cette partie, on passe en revue les opérations arithmétiques sur les fonctions. Les opérations usuelles sur les nombres réels se transposent aux fonctions.

**Définition 7.3.** On dit que deux fonctions $f$ et $g$ sont égales si et seulement si $D_f = D_g$ et si

$$\forall x \in D_f,\ f(x) = g(x).$$

*Remarque* 7.3. Pour que deux fonctions soient égales, il faut qu'elles partagent le même ensemble de définition.

**Définition 7.4.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un même ensemble $D$. On définit

- La somme de $f$ et de $g$, $f+g$, par

$$f+g: \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \end{array}$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, le produit $\lambda f$, par

$$\lambda f: \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \end{array}$$

- Le produit de $f$ et de $g$, $fg$, par

$$fg: \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \end{array}$$

- Si $\forall x \in D,\ g(x) \neq 0$, le quotient $f/g$, par

$$\frac{f}{g}: \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \end{array}$$

*Exemple* 7.3. Soient les fonctions

- $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$
- $g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$
- $h: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2+1 \end{array}$

Exprimer les fonctions $fg$, $g+h$, $f/h$ et $4f$.

**La composition**

**Définition 7.5: Composée de deux fonctions**

Soient $I$ et $J$ sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et supposons que $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ soient deux fonctions. On définit la composée de $f$ par $g$, notée $g \circ f$, par

$$g \circ f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)). \end{array}$$

*Remarque* 7.4. On visualise la situation sur un diagramme.

*Exemple* 7.4. On considère les fonctions ln et exp. Ces fonctions sont définies sur

Les composées sont-elles bien définies ?

*Exemple* 7.5. Si

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x}, \end{array}$$

alors

On constate qu'en général $f \circ g \neq g \circ f$. (On dit que la composition de fonctions n'est pas une opération commutative.)

*Remarque* 7.5. Pour étudier le domaine de définition de la composée de deux fonctions, il faut vérifier que les ensembles sont compatibles. En particulier, si $f$ est une fonction dont le domaine de definition est note $D_f$, alors

1. $1/f$ est définie sur
$$\{x \in D_f \text{ tel que } f(x) \neq 0\}.$$

2. $\ln \circ f$ est définie sur

3. $\sqrt{\cdot} \circ f$ est définie sur

*Exemple* 7.6. 1. Si $g(x) = \sqrt{-x^2+5x-6}$, alors

2. Si $h(x) = \ln(x^2-9)$, alors

3. Si $k(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, alors

## 7.2 Périodicité et symétries d'une fonction

### 7.2.1 Fonctions périodiques

**Définition 7.6.** Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $T > 0$. On dit que $f$ est $T$-périodique ou encore périodique de période $T$ si

*Exemple* 7.7. Les fonctions cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$, $2\pi$-périodiques et à valeurs dans $[-1,1]$.

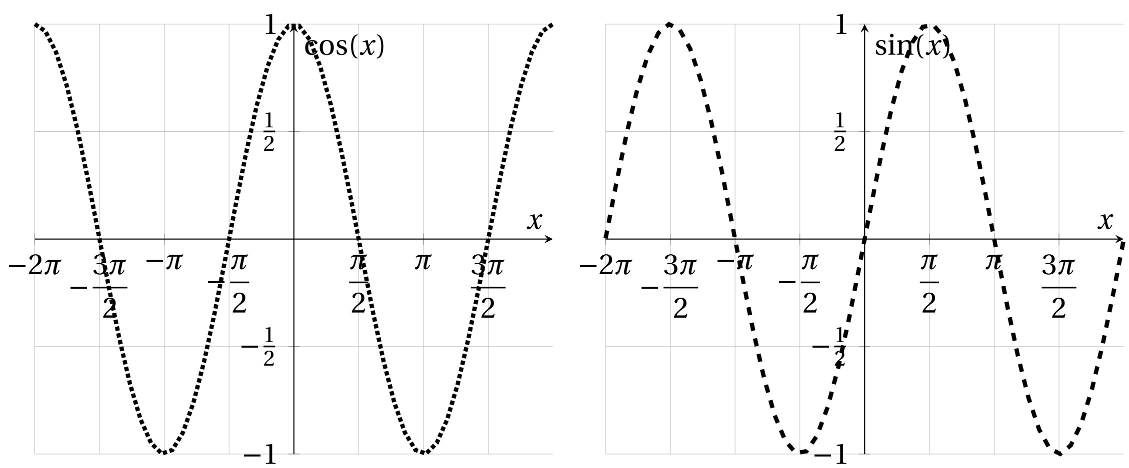


FIGURE 7.1 – Graphe des fonctions cos et sin sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$

*Exemple* 7.8. La fonction tan est définie sur l'ensemble

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

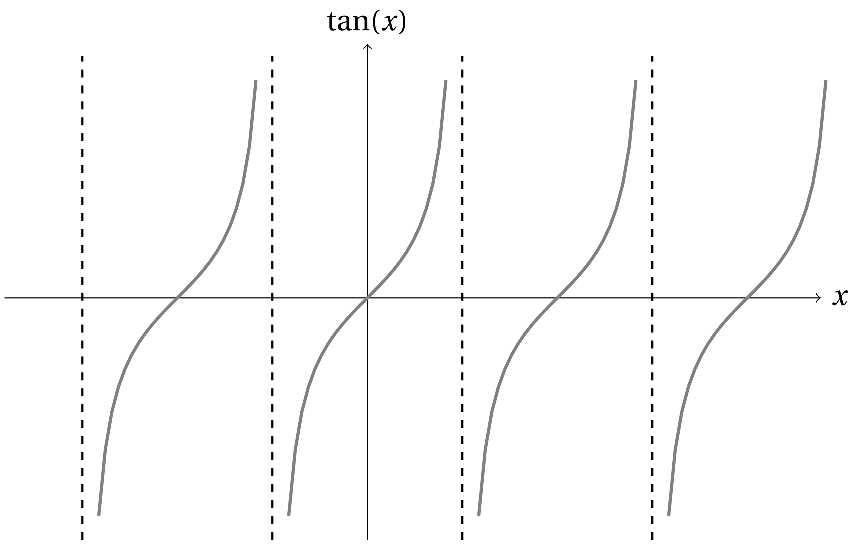


FIGURE 7.2 – Graphe de la fonction tan sur l'intervalle $]-3\pi/2, 3\pi/2[$. On observe le caractère $\pi$-périodique.

**Méthode 7.1: Méthode pour l'étude d'une fonction**

Le graphe d'une fonction $T$-périodique s'obtient en traçant le graphe de la fonction sur l'intervalle $[0, T]$ puis en faisant une translation horizontale de celui-ci d'amplitude $T$.

### 7.2.2 Fonctions paires, fonctions impaires

**Définition 7.7.** Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Dire que

- $f$ est paire signifie que
- $f$ est impaire signifie que

*Exemple* 7.9. La fonction cos est paire. Les fonctions sin et tan sont impaires. Les fonctions $x \mapsto x^2$,

$x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^4$ sont paires. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$ sont impaires.

**Théorème 7.1**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $f_n$ la fonction

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}.$$

- Si $n$ est pair, alors $f_n$ est paire.
- Si $n$ est impair, alors $f_n$ est impaire.

*Démonstration.*

□

**Méthode 7.2: Méthode pour l'étude d'une fonction**

La parité ou l'imparité d'une fonction permet de réduire l'étude de la fonction à $D_f \cap \mathbb{R}^+$ :

- Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine 0.

**Propriété 7.1.** *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction impaire, telle que $0 \in D_f$. Alors $f(0) = 0$.*

*Démonstration.*

□

**Propriété 7.2.** *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f$ est à la fois paire et impaire alors $f$ est la fonction nulle.*

*Démonstration.*

□

## 7.3 Monotonie d'une fonction

### 7.3.1 Définitions et premières remarques

**Définition 7.8.** Soit $D \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Dire que

- $f$ est croissante sur $D$ signifie que
- $f$ est strictement croissante sur $D$ signifie que
- $f$ est décroissante sur $D$ signifie que
- $f$ est strictement décroissante sur $D$ signifie que
- $f$ est monotone sur $D$ (respectivement strictement monotone) signifie que
- $f$ est constante sur $D$ signifie que

*Exemple* 7.10.
- La fonction identité est
- La fonction $x \mapsto -x$ est
- La fonction carrée est
- La fonction inverse est
- La fonction $x \mapsto 3$ est

*Remarque* 7.6.
- Attention, en général une fonction n'est pas forcément monotone (elle peut n'être ni croissante ni décroissante sur son ensemble de définition).

  *Exemple* 7.11.
- Ainsi, une fonction non croissante n'est pas forcément décroissante.

  *Exemple* 7.12.

**Propriété 7.3.** *Une fonction à la fois croissante et décroissante sur un ensemble D est constante.*

*Démonstration.*

□

### 7.3.2 Propriétés

**Théorème 7.2** • *La somme de deux fonctions croissantes (respectivement décroissantes) est*

- *Soit $f$ une fonction et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
    - *Si $f$ est croissante (respectivement décroissante) et si $\lambda \geq 0$, alors*
    - *Si $f$ est croissante (respectivement décroissante) et $\lambda \leq 0$, alors*
- *La composée de deux fonctions croissantes*
- *La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est*
- *La composée de deux fonctions décroissantes est*

*Démonstration.* □

*Exemple* 7.13. • La fonction $x \mapsto -2\sqrt{x}$ est

- La fonction $y \mapsto 4e^y$ est
- La fonction $x \mapsto -1/x$ est
- La fonction $x \mapsto 1/e^{-x}$ est
- La fonction $x \mapsto 1/\sqrt{e^x}$ est

### 7.3.3 Liens avec la dérivée

Dans cette partie, on rappelle le lien entre signe de la dérivée et monotonie de la fonction. La dérivée est un outil extrêmement puissant : on ramène l'étude de la monotonie d'une fonction au signe de sa dérivée sur un intervalle.

**Théorème 7.3: Signe de la dérivée, monotonie de la fonction sur un intervalle**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

- Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ alors $f$ est croissante sur $I$.
- Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ alors $f$ est strictement croissante sur $I$.
- Si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ alors $f$ est décroissante sur $I$.
- Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$ alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.
- Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$ alors $f$ est constante sur $I$.

*Remarque* 7.7. Le fait que $I$ est un intervalle est une hypothèse fondamentale : penser à l'exemple de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{\star}$.

## 7.4 Dérivées des fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions $f$ suivantes $f$ est définie sur son son ensemble de définition et dérivable sur son ensemble de dérivation.

**Théorème 7.4: Dérivée des fonctions usuelles**

| Fonction | Ensemble de définition | Ensemble de dérivation | Fonction dérivée |
|---|---|---|---|
| $x \longmapsto x^n$ | $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$<br>$\mathbb{R}^*$ si $n<0$ | $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$<br>$\mathbb{R}^*$ si $n<0$ | |
| $x \longmapsto 1/x$ | $\mathbb{R}^\star$ | $\mathbb{R}^\star$ | |
| $x \longmapsto \sqrt{x}$ | $[0, +\infty[$ | $]0, +\infty[$ | |
| $x \longmapsto \ln x$ | $]0, +\infty[$ | $]0, +\infty[$ | |
| $x \longmapsto e^x$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | |
| $x \longmapsto x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$ | $]0, +\infty[$ | $]0, +\infty[$ | |
| $x \longmapsto \sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | |
| $x \longmapsto \cos x$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | |
| $x \longmapsto \tan x$ | $D_{\tan}$ | $D_{\tan}$ | |

On dispose des règles de dérivation suivantes concernant les opérations sur les fonctions :

**Théorème 7.5: Opérations sur les fonctions et dérivations**

Si $f$ et $g$ sont dérivables sur un intervalle $I$, alors

- $f+g$ est dérivable sur $I$ et $\forall x \in I,\ (f+g)'(x) = f'(x)+g'(x).$
- $f \times g$ est dérivable sur $I$ et $\forall x \in I,\ (f \times g)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$
- Si $\forall x \in I,\ g(x) \neq 0$, alors $1/g$ est dérivable sur $I$ et

$$\forall x \in I,\ \left(\frac{1}{g}\right)'(x) =$$

- Si $\forall x \in I,\ g(x) \neq 0$ alors $f/g$ est dérivable sur $I$ et

$$\forall x \in I,\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) =$$

*Exemple* 7.14.

- La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2\cos(x)$ est dérivable comme produit des deux fonctions carré et cos et sa dérivée $f'$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f'(x) =$$

- La fonction $h : x \mapsto \sqrt{x} + x^3$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Sa dérivée est la fonction

$$h' : x \mapsto$$

- La fonction $g : x \mapsto x/(e^x - 1)$ est définie et dérivable sur Sa dérivée vaut

On dispose du résultat suivant pour la dérivée de la composition de deux fonctions :

**Théorème 7.6: Dérivée de la composée**

Si $I$ et $J$ sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ est dérivable sur $I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ alors $g \circ f$ est dérivable sur $I$ et

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

*Exemple* 7.15. Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{3x} \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(x^2).$$

Alors

Comme conséquence, on a les formules de dérivation suivantes :

**Théorème 7.7: Dérivée des fonctions usuelles**

Si $u$ est une fonction définie sur $D_u$ et dérivable sur $D_{u'}$ alors on dispose les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur les ensembles indiqués, avec la fonction dérivée indiquée :

| Fonction | Ensemble de définition | Ensemble de dérivation | Fonction dérivée |
|---|---|---|---|
| $u^n$ $(n \in \mathbb{N})$ | $D_u$ | $D_{u'}$ | |
| $\frac{1}{u}$ | $\{x \in D_u$ tels que $u(x) \neq 0\}$ | $\{x \in D_{u'}$ tels que $u(x) \neq 0\}$ | |
| $\sqrt{u}$ | $\{x \in D_u$ tels que $u(x) \geq 0\}$ | $\{x \in D_{u'}$ tels que $u(x) > 0\}$ | |
| $\ln\lvert u\rvert$ | $\{x \in D_u$ tels que $u(x) \neq 0\}$ | $\{x \in D_{u'}$ tels que $u(x) \neq 0\}$ | |
| $e^u$ | $D_u$ | $D_{u'}$ | |
| $u^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ | $\{x \in D_u$ tels que $u(x) > 00\}$ | $\{x \in D_{u'}$ tels que $u(x) > 0\}$ | |
| $\sin u$ | $D_u$ | $D_{u'}$ | |
| $\cos u$ | $D_u$ | $D_{u'}$ | |
| $\tan u$ | $\{x \in D_u$ tels que $u(x) \in D_{\tan}\}$ | $\{x \in D_{u'}$ tels que $u(x) \in D_{\tan}\}$ | |

*Exemple* 7.16. Établir le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto \sin(3x^2+1)$,
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{e^x+1}$,
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$,
- $f_4 : x \mapsto \frac{1}{(5x-4)^2}$.

## 7.5 Tangente à la courbe

**Théorème 7.8**

Soit $f$ une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.
Si $f$ est dérivable en $x_0$ alors sa courbe possède, au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$.
Cette tangente est la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

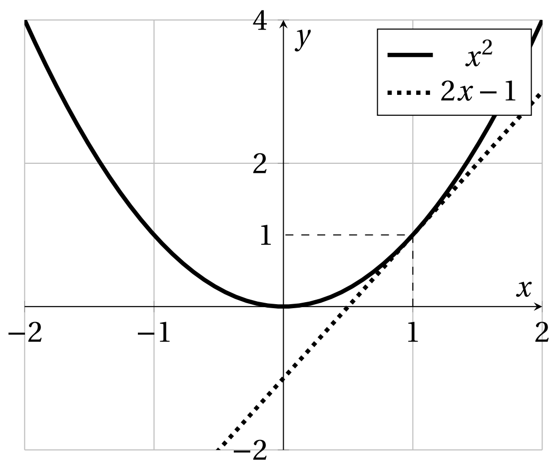


FIGURE 7.3 – La courbe de la fonction $x \mapsto x^2$ et sa tangente au point $x_0 = 1$, d'équation $y = 1+2(x-1) = 2x-1$.

*Remarque* 7.8. Si la dérivée de $f$ s'annule au point $x_0$, c'est-à-dire si $f'(x_0) = 0$ alors la courbe de $f$ possède une tangente horizontale au point $x_0$.

## 7.6 Catalogue des fonctions usuelles

### 7.6.1 Les fonctions élémentaires

**Les fonctions puissances et polynomiales**

On considère dans un premier temps les fonctions puissance élémentaires, c'est-à-dire les fonctions

$$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n \end{array}$$

où $n$ est un entier naturel.

En dehors des cas triviaux $n = 0$ et $n = 1$, les deux exemples les plus importants sont $n = 2$ et $n = 3$ : la fonction carrée et la fonction cube.

Les fonctions $f_n$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour $n \geq 1$, leur dérivée $f_n'$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = nx^{n-1},$$

ce qu'on peut encore écrire $f_n' = nf_{n-1}$.

Pour $n \geq 2$, la dérivée de $f_n$ s'annule donc en 0. Graphiquement, la courbe représentative de $f_n$ a alors une tangente horizontale en l'origine.

- Si $n$ est pair, $f_n$ est paire, décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et de limite $+\infty$ en $\pm\infty$. Son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}_+$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

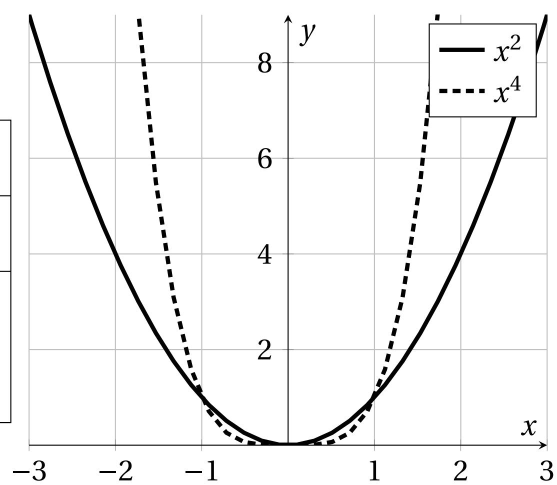


FIGURE 7.4 – Tableau de variations de $f_n$ pour $n > 0$ pair et courbe représentative des fonctions $f_2$ et $f_4$ sur l'intervalle $[-3, 3]$.

- Si $n$ est impair, $f_n$ est impaire, croissante sur $\mathbb{R}$ de limites $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$. Son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.

On appelle *fonction polynomiale* toute combinaison linéaire des fonctions $f_n$, c'est-à-dire toute fonction $f$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

où les nombres $a_k$ sont des constantes réelles.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

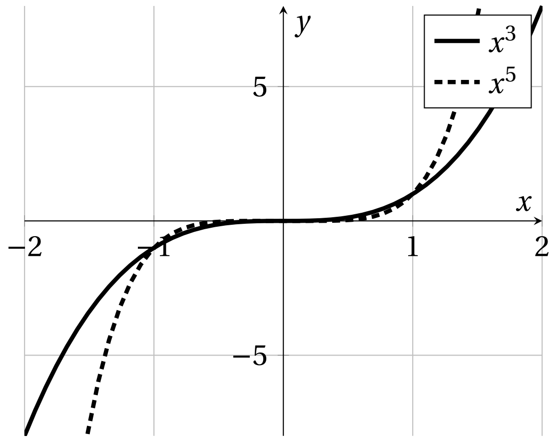


FIGURE 7.5 – Tableau de variations de $f_n$ pour $n > 1$ impair et courbe représentative de la fonction cube sur $[-3,3]$.

**La fonction racine carrée**

$$\sqrt{\cdot} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$$

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}_+$. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

En l'origine, la courbe représentative a une tangente verticale, ce qui explique l'absence de dérivée en ce point.

Elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Elle est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $\sqrt{x}$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

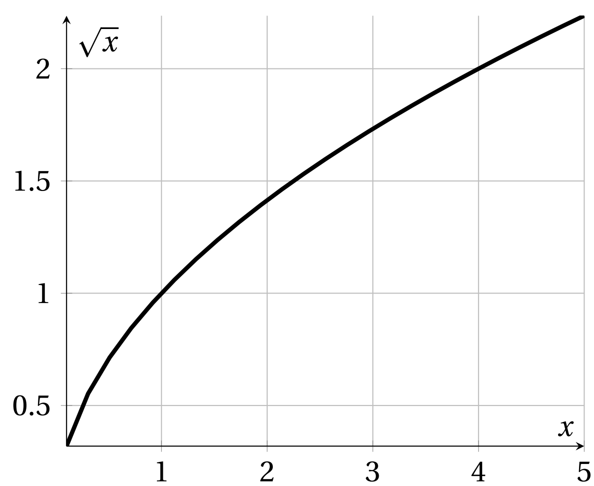


FIGURE 7.6 – Tableau de variations et courbe représentative de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$.

*Remarque* 7.9. On peut définir des fonctions racines $n$-ème, pour n'importe quel entier $n \geq 2$. Pour $n$ impair, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $n$ pair, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Cependant, on préfèrera généralement utiliser l'exponentielle et le logarithme pour traiter ces fonctions.

#### La fonction inverse

La fonction inverse $x \mapsto 1/x$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et a pour ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^*$. Composée avec elle-même, on obtient la fonction identité $x \mapsto x$ : on dit que la fonction inverse est une *involution*.

C'est une fonction impaire. Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^\star$.

*Remarque* 7.10. Attention à ne pas dire qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^*$, ce qui est faux (puisque par exemple $-2 < 2$ et $-1/2 < 1/2$)

Sa limite en $\pm\infty$ est 0. En $0^+$, la fonction tend vers $+\infty$ ; en $0^-$ vers $-\infty$. L'axe des abscisses est donc une asymptote horizontale tandis que l'axe des ordonnées est une asymptote verticale.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto -1/x^2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\dfrac{1}{x^2}$ | | $-$ | $\Vert$ | $-$ | |
| $\dfrac{1}{x}$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty \ \Vert\ +\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

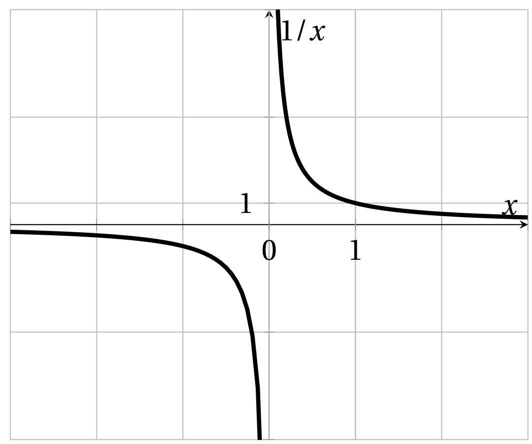


FIGURE 7.7 – Tableau de variations et courbe représentative de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^\star$.

On peut aussi écrire cette fonction comme $x \mapsto x^{-1}$. On peut généraliser et considérer toutes les fonctions de la forme $x \mapsto x^{-n}$, pour $n \geq 1$. On pourrait en faire une étude analogue. Notons en particulier que la dérivée de $x \mapsto x^{-n}$ est $-nx^{-n-1}$.

*Remarque* 7.11. La dérivée de $x \mapsto x^n$ est toujours $nx^{n-1}$, que $n$ soit un entier positif ou négatif. Le plus simple est sans doute de retenir cette unique formule et de systématiquement écrire une fonction de la forme $x \mapsto 1/x^n$ sous la forme $x \mapsto x^{-n}$, avant de dériver.

### 7.6.2 Les fonctions exponentielle et logarithme

#### La fonction exponentielle

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et a pour ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^{+*}$. On note $e^x$ ou $\exp(x)$ l'image d'un réel $x$ par cette fonction.

Sa limite en $-\infty$ est 0 ; sa limite en $+\infty$ est $\infty$ et elle est strictement croissante.

La fonction exponentielle est dérivable et sa dérivée est égale à elle-même. Ce résultat et la condition $\exp(0) = 1$ caractérisent la fonction exponentielle.

On a la règle de calcul suivante sur l'exponentielle :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

On renvoie à la fiche de remédiation sur l'exponentielle pour les autres propriétés algébriques de l'exponentielle.

Il est utile de connaître une valeur approchée de $e = e^1$ : environ $2,7$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $e^x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |

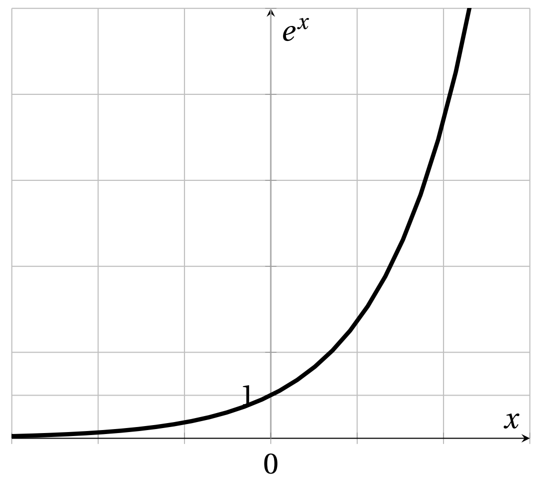


FIGURE 7.8 – Tableau de variations et courbe représentative de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}^\star$.

**La fonction logarithme**

La fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et a pour ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante et a pour limites $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de dérivée égale à $x \mapsto 1/x$. On a la règle de calcul suivante sur le logarithme :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques l'une de l'autre, au sens où

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \ln\big(\exp(x)\big) = x \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \exp\big(\ln(x)\big) = x.$$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

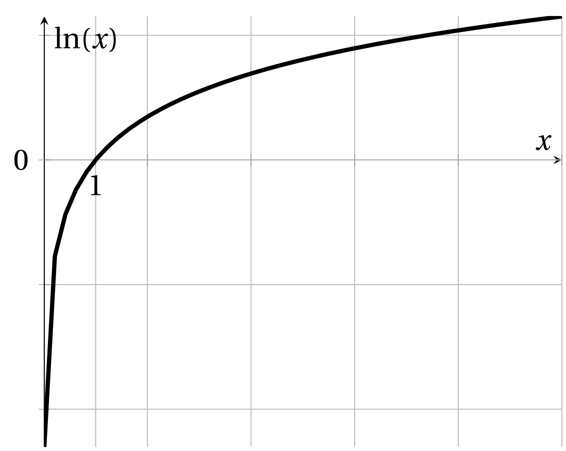


FIGURE 7.9 – Tableau de variations et courbe représentative de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Il peut être utile de connaître une valeur approchée de $\ln(2)$ : environ $0,7$. Comme $e \simeq 2,7$ et que $\ln(e) = 1$, il est bien cohérent d'avoir $\ln(2) < 1$.

**Logarithme et exponentielle de base $b$**

Soit $b > 0$. Dans certaines sciences, il est courant d'utiliser des logarithmes dans une autre base (en pratique, la base 10 en chimie et la base 2 en informatique). Par définition, la fonction *logarithme de base b* est la fonction

$$\log_b : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(b)},$$

définie de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, on a pour tout $b : \log_b(b) = 1$. Le *logarithme naturel* – c'est-à-dire la fonction ln – est égal à $\log_e$. Traditionnellement en France, on note simplement log pour $\log_{10}$.

On peut de même définir une *exponentielle de base b*. Par définition,

$$\exp_b : x \mapsto \exp(x \ln b),$$

définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. On note le plus souvent $b^x$ plutôt que $\exp_b(x)$. Si $x$ est un entier, la notation $b^x$ peut alors être interprétée comme un calcul élémentaire de puissances, ou bien comme la quantité $\exp_b(x)$. Heureusement, les notations sont compatibles : elles calculent la même chose.

**Propriété 7.4.** *Soient a et b* $> 0$. *On note* $a^b = \exp(b \ln(a)) = e^{b \ln(a)}$.

Quand une expression fait intervenir des puissances un peu compliquées, on reviendra *systématiquement* à la notation exponentielle : on écrira donc $a^b$ comme $\exp(b \ln a)$. En particulier, si $b = 1/n$ est l'inverse d'un entier naturel et si $x > 0$ alors

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(x)\right).$$

### 7.6.3 Fonctions trigonométriques

**Les fonctions cosinus et sinus**

Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et ont pour ensemble d'arrivée $[-1, 1]$. Elles sont périodiques de période $2\pi$. La fonction cosinus est paire, tandis que la fonction sinus est impaire. Elles sont toutes deux dérivables : $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

De la relation $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$, on déduit que le graphe de cosinus s'obtient en translatant le graphe de sinus de $\pi/2$ (vers la gauche!).

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et strictement croissante sur $[\pi, 2\pi]$. La fonction sinus est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et strictement décroissante sur $[\pi/2, 3\pi/2]$.

Comme $\sin'(0) = 1$ et que $\cos'(0) = 0$, le graphe de cosinus a une tangente horizontale en le point $(0, 1)$ tandis que le graphe de sinus a pour tangente la droite d'équation $y = x$ en le point $(0, 0)$.

**La fonction tangente**

La fonction tangente est définie sur $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et a $\mathbb{R}$ pour ensemble d'arrivée. Elle est périodique de période $\pi$ et est strictement croissante sur chacun des intervalles $]\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi[$. Elle tend vers $-\infty$ en $(\pi/2)^+$ et vers $+\infty$ en $(\pi/2)^-$.

La fonction tangente est dérivable là où elle est définie. Sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in D_{\tan}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

En particulier, $\tan(0) = 0$ et $\tan'(0) = 1$. Donc, la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe représentative de la fonction tangente en l'origine.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos'(x) = -\sin(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $\cos(x)$ | $1 \searrow$ | $0 \searrow$ | $-1 \nearrow$ | $0 \nearrow$ | $1$ |
| $\sin'(x) = \cos(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\sin(x)$ | $0 \nearrow$ | $1 \searrow$ | $0 \searrow$ | $-1 \nearrow$ | $0$ |

FIGURE 7.10 – Tableau de variations des fonctions sin et cos

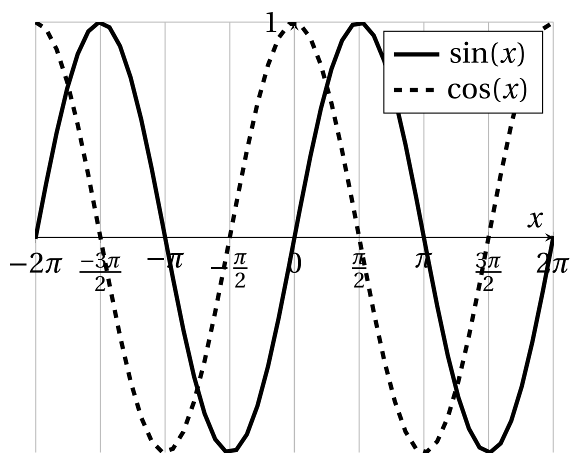


FIGURE 7.11 – Courbe representative des fonctions sin et cos sur l'intervalle $[-2\pi, \pi]$

| $x$ | $-\pi/2$ | $0$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|
| $\tan(x)$ | $-\infty \nearrow$ | $0 \nearrow$ | $+\infty$ |

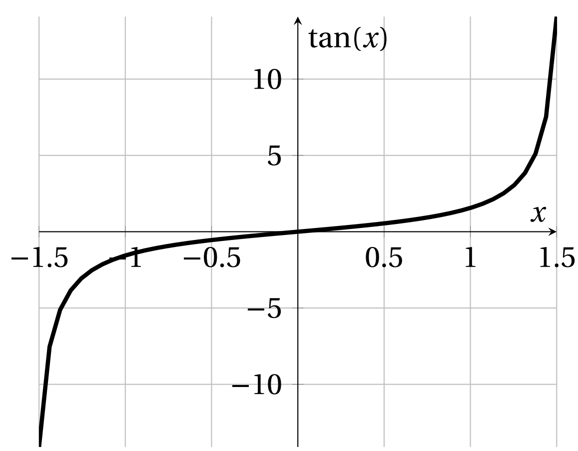


FIGURE 7.12 – Tableau de variations et courbe représentative de la fonction tangente sur $]-\pi/2, \pi/2[$. La courbe sur $D_{\tan}$ s'obtient par translations horizontales successives d'amplitude $\pi$

### 7.6.4 Fonctions puissances généralisées

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction puissance généralisée

$$f_\alpha : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+\star} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^\alpha. \end{array}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, on a l'égalité

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = \exp(\ln(x^\alpha)) = \exp(\alpha \ln(x)),$$

qui constitue en réalité une définition. Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on retrouve les fonctions puissances élémentaires, lorsque $\alpha = 1/2$ on retrouve la fonction racine carrée, lorsque $\alpha = -1$ on retrouve la fonction inverse.

$f_\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\alpha}$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(1) = 1$. Pour étudier le comportement de $f_\alpha$, il faut distinguer les cas selon que $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ ou $\alpha < 0$.

**Cas** $\alpha = 0$

Si $\alpha = 0$, alors $f_\alpha$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

**Cas** $\alpha > 0$**.**

Si $\alpha > 0$, alors la dérivée $f'_\alpha$ de $f_\alpha$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+\star}$, donc $f_\alpha$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. De plus, comme $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to 0} f_\alpha(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty,$$

(justifier avec la définition via l'exponentielle).

**Cas** $\alpha < 0$**.**

Si $\alpha < 0$, alors la dérivée $f'_\alpha$ de $f_\alpha$ est strictement négative sur $\mathbb{R}^{+\star}$, donc $f_\alpha$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. De plus, comme $\alpha < 0$,

$$\lim_{x\to 0} f_\alpha(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} f_\alpha(x) = 0,$$

(justifier avec la définition via l'exponentielle).

### 7.6.5 Les fonctions valeur absolue et partie entière

**La fonction valeur absolue**

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ et a pour ensemble d'arrivée $\mathbb{R}_+$. C'est une fonction paire.

Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et a pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$.

La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas dérivable en 0.

On rappelle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \sqrt{x^2}.$$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x^\alpha$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |

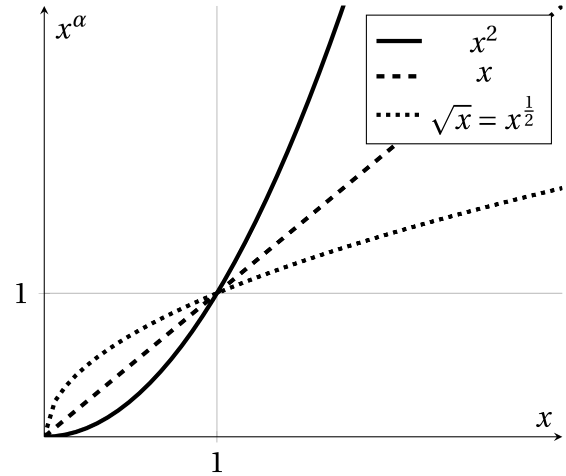


FIGURE 7.13 – Tableau de variations de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha > 0$. Courbe des fonctions $f_2$, $f_1$ et $f_{1/2}$ sur $\mathbb{R}^+$. La position relative des courbes est donnée par la valeur de $\alpha$.

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x^\alpha$ | $+\infty$ | $1$ | $0$ |

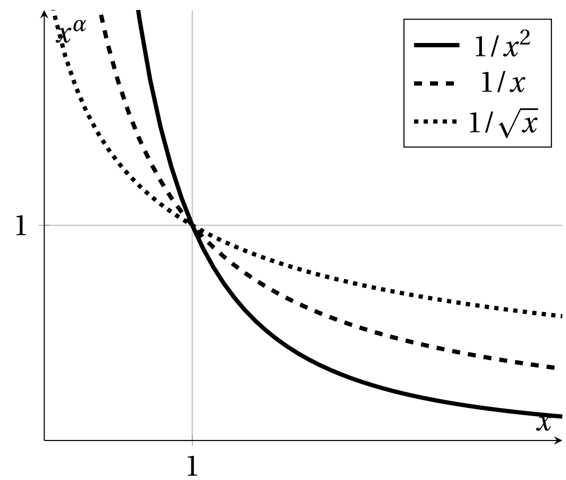


FIGURE 7.14 – Tableau de variations de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha < 0$. Courbe des fonctions $f_{-2}$, $f_{-1}$ et $f_{-1/2}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$. La position relative des courbes est donnée par la valeur de $\alpha$.

**La fonction partie entière**

**Définition 7.9.** Soit $x$ un réel. La *partie entière* de $x$, notée $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier $n$ tel que $n \leq x$.

La partie entière d'un réel $x$ vérifie donc $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

*Exemple* 7.17. $\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\lfloor \pi \rfloor = \pi$ et $\lfloor -3{,}24 \rfloor = -4$.

La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$ et a $\mathbb{Z}$ pour ensemble d'arrivée. C'est une fonction croissante, mais *pas* strictement croissante : elle est constante égale à $n$ sur chaque intervalle $[n, n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

## 7.7 Transformations simples

Si $f$ est une fonction dont on connaît la courbe représentative et $a \in \mathbb{R}$, on peut construire rapidement la courbe représentative des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto af(x)$ et $x \mapsto f(ax)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x\rvert$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\infty$ |

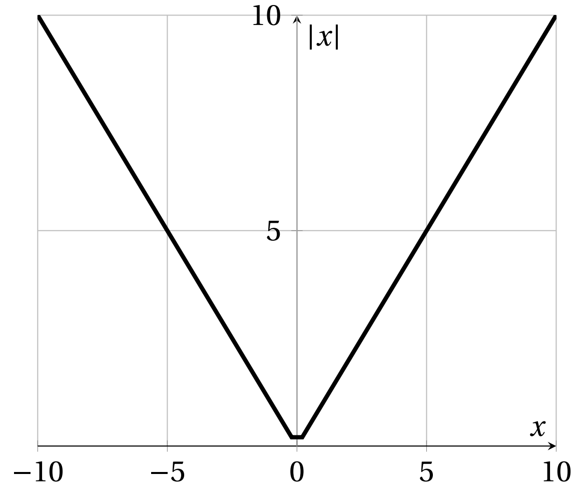


FIGURE 7.15 – Tableau de variations et courbe représentative de la fonction $x \mapsto |x|$.

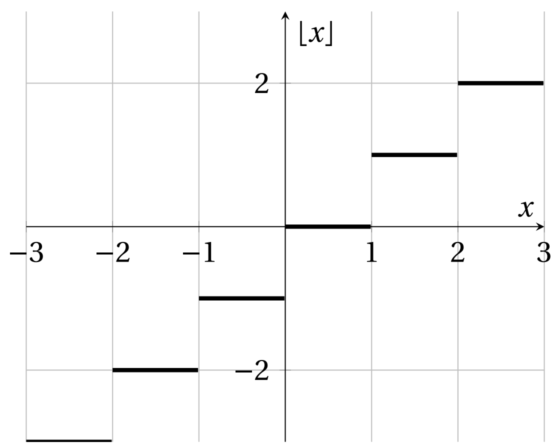


FIGURE 7.16 – Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

On prend l'exemple de la fonction carrée $f(x) = x^2$ et $a = 2$. On construit les courbes représentatives de $x \mapsto f(x)+2$, $x \mapsto f(x+2)$, $x \mapsto 2f(x)$ et $x \mapsto f(2x)$.

On constate que :

- la courbe représentative de $x \mapsto f(x)+2$ est l'image de celle de $f$ par la translation verticale d'amplitude 2;
- la courbe représentative de $x \mapsto f(x+2)$ est l'image de celle de $f$ par la translation horizontale d'amplitude $-2$;
- la courbe représentative de $x \mapsto 2f(x)$ est l'image de celle de $f$ par la dilatation horizontale de coefficient 2;
- la courbe représentative de $x \mapsto f(2x)$ est l'image de celle de $f$ par la contraction horizontale de coefficient 2.

On généralise pour un réel $a$ quelconque et pour $f$ quelconque.

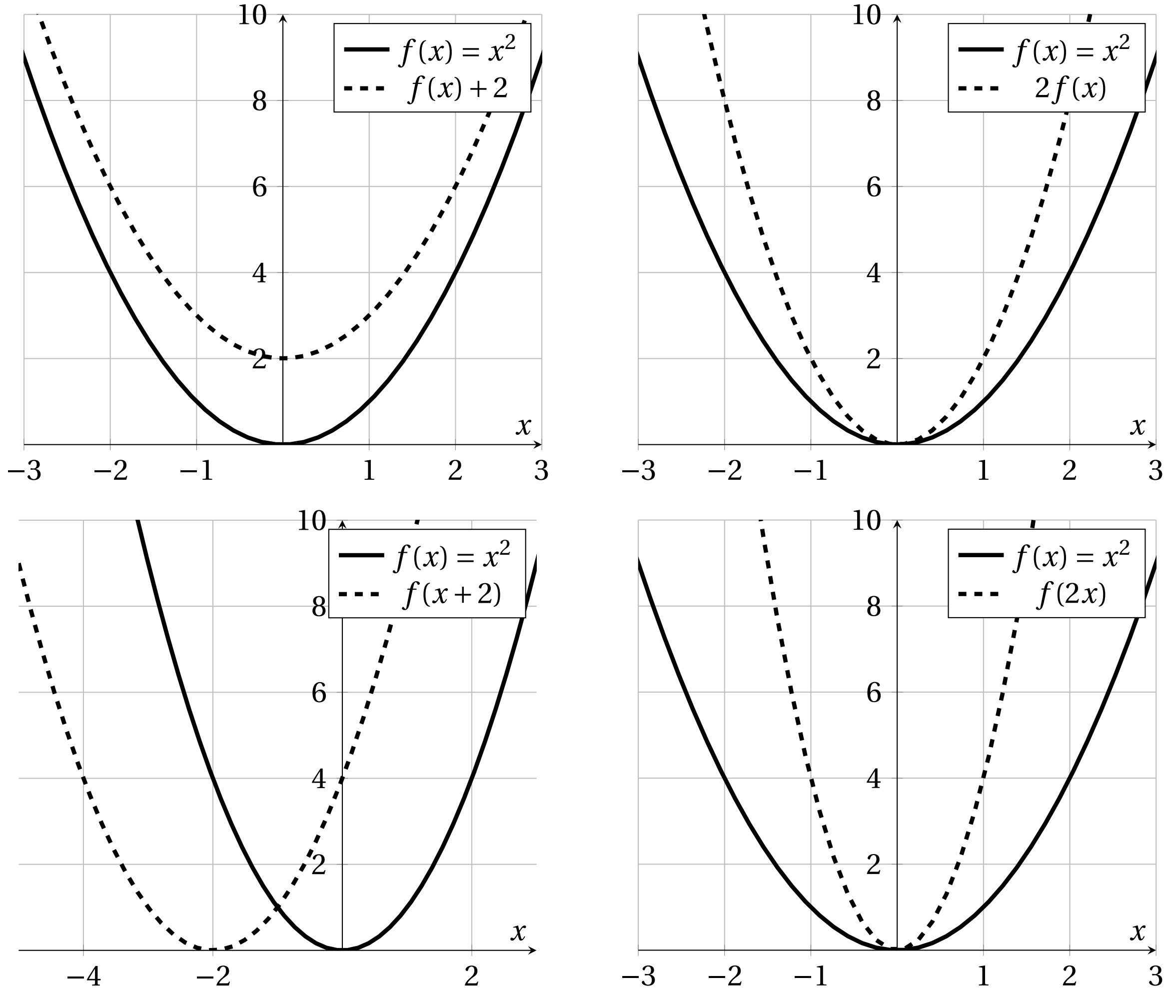


FIGURE 7.17 – Translations horizontales et verticales, dilatation et contraction sous l'effet de transformations simples de la fonction carrée.

**Propriété 7.5**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Alors

- Le graphe de $x \mapsto f(x) + a$ s'obtient par translation verticale du graphe de longueur $a$.
- Le graphe de $x \mapsto f(x+a)$ s'obtient par translation horizontale du graphe de longueur $-a$.
- Le graphe de $x \mapsto af(x)$ s'obtient par dilatation verticale du graphe de $f$ d'un facteur $a$.
- Le graphe de $x \mapsto f(ax)$ s'obtient par contraction horizontale du graphe de $f$ d'un facteur $a$.

*Remarque* 7.12. Si $a$ est négatif, les dilatations/contractions sont accompagnées d'un retournement vertical du graphe (c'est-à-dire une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses).

## 7.8 Étude de fonctions

L'étude d'une fonction passe par les étapes suivantes :

- Détermination de l'ensemble de définition
- Étude des symétries et réduction du domaine d'étude
- Étude des variations de la fonction
- Calcul des valeurs particulières, des limites
- Tracé de la courbe représentative de la fonction.

Détaillons ces étapes.

**Détermination de l'ensemble de définition.** On identifie les problèmes éventuels dans l'ordre dans lequel ils se posent. En pratique, on résout des équation et des inéquations.

**Etude des symétries et réduction du domaine d'étude.** On cherche si la fonction est paire/impaire et si elle présente une périodicité.

- Si la fonction est paire/impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.
- Si la fonction est $T$-périodique, il suffit de l'étudier sur une période, par exemple $[0, T]$ ou $[-T/2, T/2]$.
- Si la fonction est paire/impaire et $T$-périodique, il suffit de l'étudier sur la *demi-période* $[0, T/2]$.

On précise clairement le domaine d'étude à la fin de cette étape. Il est donc en général plus petit que l'ensemble de définition.

**Étude des variations de la fonction.** Le plus souvent, cela passe par le calcul de la dérivée et l'étude de son signe. Dans certains cas, le signe de la dérivée ne pourra pas être obtenu directement ; on pourra alors calculer la dérivée seconde pour obtenir les variations de $f'$ puis son signe...

On conclut cette étape par un tableau de variations sur le domaine d'études.

**Calcul des valeurs particulières, des limites.** On détermine les limites de la fonction aux bornes du domaine d'étude (y compris en les points isolés où la fonction n'est pas étudiée). On calcule aussi les valeurs de la fonction aux points où la monotonie change.

**Tracé de la courbe représentative.** On commence le tracé sur le domaine d'étude. En pratique, on trace la courbe la plus simple qui respecte les variations, les valeurs particulières et les limites. En les points particuliers, on peut aussi calculer la dérivée, qui donne la valeur du coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point.

Si la fonction était paire/impaire, on en déduit le tracé sur les négatifs. Si la fonction était $T$-périodique, on déduit du tracé sur une période le tracé de la courbe sur tout l'ensemble de définition.

*Remarque* 7.13. On fait figurer clairement les asymptotes verticales et horizontales à la courbe.

- La droite (verticale) d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de $f$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.
- La droite (horizontale) d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de $f$ si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

*Exemple* 7.18.

- Étude de $f$ définie par
$$f(x) = \ln(-2x^2 + x + 1).$$
- Étude de $g$ définie par
$$g(x) = \frac{x^3 - 2x}{3 - x^2}.$$