Exercice 1 : Soit $x > 0$ un nombre réel. On pose $f(x) = x^2 \ln x$. Calculer f en les valeurs suivantes :

$$e, \quad \frac{1}{e}, \quad \sqrt{e}, \quad e^2, \quad e\sqrt{e}, \quad \frac{1}{e^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Exercice 2 : Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \dfrac{\ln(81) - \ln(9)}{\ln\sqrt{3}}$
2. $B = \ln\left((\sqrt{5}+1)^{18}\right) + \ln\left((\sqrt{5}-1)^{18}\right)$
3. $C = \ln\sqrt{\dfrac{1}{e^{-x}}}$
4. $D = \left[\exp\left(-\dfrac{1}{\ln\frac{1}{x}}\right)\right]^{\ln\frac{1}{x^2}}$
5. $E = (\ln x)^2 - \ln(x^2) + 1$
6. $F = \ln(e^{x(y+1)} - e^x) - x$

Exercice 3 : Soit n un entier naturel et x un réel strictement positif. Simplifier :

1. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^5}$
2. $\left(\sqrt[6]{3}\right)^3$
3. $\sqrt[5]{3}\,\sqrt[3]{9}\,\sqrt[15]{3^2}$
4. $\dfrac{x^3 x^{5n}}{x^{2n} x^5}$
5. $(x^{-n+1})^2 (x^3)^{n-2}$
6. $(2^{2n})^{(2n)^{2^n}}$

Exercice 4 : Dans chaque question, simplifier l'expression de $f(x)$ en distinguant selon la valeur de x, puis tracer la courbe représentative de la fonction f.

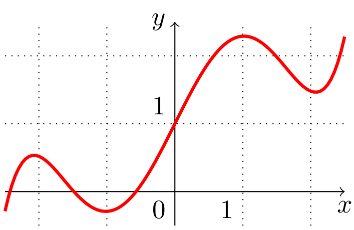
1. $f(x) = |x-3| - |2x+1|$
2. $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor, \quad x \in [-2, 2]$
3. $f(x) = \lfloor x \rfloor + |x|, \quad x \in [-2, 2]$

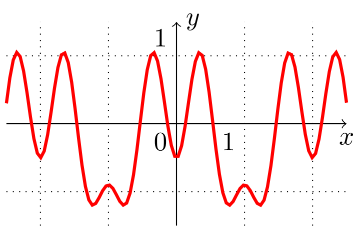
Exercice 5 : Montrer que pour tout réel x, on a : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

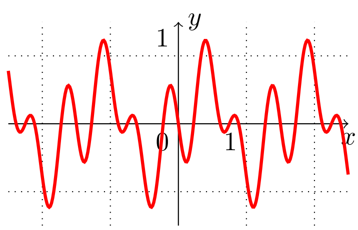
Exercice 6 : Déterminer pour chacune des fonctions suivantes leur ensemble de définition et leurs limites aux bornes de cet ensemble.

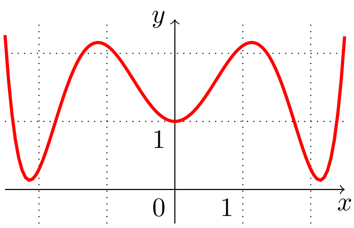
1. $f(x) = e^x - x^2$
2. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 3x - 4}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
4. $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$
5. $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x^2 + e^x}$
6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
7. $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$
8. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
9. $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$
11. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2e^{2x}+1}{e^x - 2}\right)$

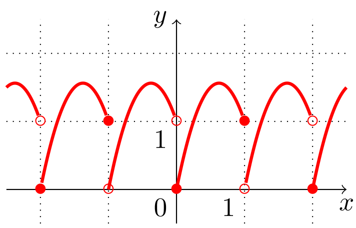
Exercice 7 : Pour chacun des graphes suivants, indiquer si la fonction correspondante semble être paire, impaire, périodique (et dans ce cas préciser la plus petite période apparente). Aucune justification n'est demandée.

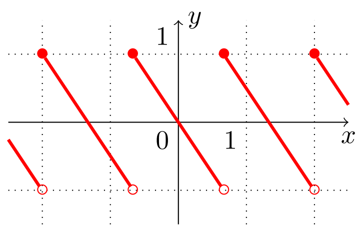
1.


3.


5.


2.


4.


6.


Exercice 8 : Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions.

1. Montrer que, si les fonctions f et g sont paires, alors la somme $f + g$ est une fonction paire. Que dire si f et g sont impaires, si f est paire et g impaire ?
2. Mêmes questions avec le produit fg.
3. Mêmes questions avec le quotient f/g (en supposant que la fonction g ne s'annule pas).
4. Mêmes questions avec la composée $g \circ f$.

Exercice 9 : Donner l'ensemble de définition, et étudier la parité des fonctions suivantes

1. $x \mapsto 3\ln(\pi + x^2) + 1$
2. $x \mapsto \dfrac{2x^5 - 7x^3}{x^4 - x^2 + 3}$
3. $x \mapsto e^{x^3+3x}$
4. $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
5. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
6. $x \mapsto \ln\big(x + \sqrt{1+x^2}\big)$

Exercice 10 : Déterminer l'ensemble de définition, le domaine d'existence de la dérivée et la dérivée des fonctions définies par :

1. $f(x) = \ln(x^2 - 3)$
2. $f(x) = \sqrt{2x - 1}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
6. $f(x) = \sqrt{-2 + x - x^2}$
7. $f(x) = \ln(\ln(x))$
8. $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$
9. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x + 2)}$
10. $f(x) = x^x$
11. $f(x) = (1 + x^2)^{1/x}$

Exercice 11 : Déterminer les dérivées secondes des fonctions 1. à 3. de l'exercice précédent.

Exercice 12 : Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse considéré :

1. $a(x) = \ln(x^2 + 1)$, en $x = 1$;
2. $b(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, en $x = 0$;
3. $c(x) = \ln(1 + xe^x)$, en $x = -1$;
4. $d(x) = \dfrac{x^4 - 4}{x^2 + 2}$, en $x = 2$.

Exercice 13 : En dressant leurs tableaux de variations, rechercher les extremums (maximum, minimum) des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition :

1. $a(x) = x(1 - x)$
2. $b(x) = x \ln x$
3. $c(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Exercice 14 : Résoudre les inéquations suivantes

1. $(E_1) : e^{3x-5} \geqslant 12$
2. $(E_2) : 1 \leqslant e^{-x^2+x}$
3. $(E_3) : \exp(1 + \ln(x)) \geqslant 2$
4. $(E_4) : \ln(2x) \geqslant \ln(x^2 - 1)$