I Logique et quantificateurs

Exercice 1 : Écrire avec les quantificateurs les assertions suivantes ainsi que leur négation. Préciser le cas échéant les propositions fausses.

1. Il existe un entier naturel inférieur ou égal à tous les autres.
2. Il existe un réel strictement positif dont le cube est strictement négatif.

Exercice 2 : Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

- Traduire en langage courant les expressions avec quantificateurs,
 - Formaliser avec les quantificateurs la négation de l'expression.
1. $\exists (m, M) \in \mathbf{R}^2, \forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$.
 2. $\forall (x, x') \in I^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
 3. $\forall y \in \mathbf{R}_+^*, \exists x \in I, f(x) = y$.

Exercice 3 : Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1. $\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \ln(n) \leq M$.
2. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists M \in \mathbf{R}, \ln(n) \leq M$.

Y-a-t-il une différence entre les deux ?

Exercice 4 : Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Écrire mathématiquement les propriétés suivantes :

1. f prend la valeur 1.
2. f prend ses valeurs entre -2 et 3 .
3. f ne prend que des valeurs entières.
4. f s'annule sur l'intervalle $[-1, 1[$.

Exercice 5 : Comparer logiquement (*i.e* du point de vue de l'implication) les assertions suivantes.

On pourra s'aider en prenant comme exemple les élèves d'une classe E et en considérant : $P(x)$: "l'élève x fait de la guitare" et $Q(x)$: "l'élève x fait du volley".

1. $\ll \exists x \in E, P(x) \text{ et } Q(x) \gg$ et $\ll \exists x \in E, P(x) \text{ et } \exists x \in E, Q(x) \gg$.
2. Même chose en remplaçant et par ou.
3. $\ll \forall x \in E, P(x) \text{ et } Q(x) \gg$ et $\ll \forall x \in E, P(x) \text{ et } \forall x \in E, Q(x) \gg$.
4. Même chose en remplaçant et par ou.

Exercice 6 : Donner la contraposée et la négation des implications suivantes :

1. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geq A \Rightarrow f(x) \geq B$,
2. $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

II Ensembles

Exercice 7 : Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

Montrer que : $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Exercice 8 : Soient A et B deux parties d'un ensemble E telles que $A \cup B = A \cap B$.

Montrer que $A = B$.

Exercice 9 : Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E .

Montrer que les assertions : (P) $A \cup B = A \cap C$ et (Q) $B \subset A \subset C$ sont équivalentes.

Exercice 10 : Soient A, B, C, D quatre parties d'un même ensemble E .

On suppose que : $A \subset C, B \subset D, A \cup B = C \cup D$ et $C \cap D = \emptyset$.

Montrer que $A = C$ et $B = D$.

Exercice 11 : Soit A et B deux ensembles.

On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble : $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.

1. Représenter $A \Delta B$ sur un dessin.
2. Montrer que, si A, B et C sont trois ensembles, on a l'équivalence : $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.