

Exercice 1 : Donner sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z_1 = (2 - 3i)(3 + i)$
2. $z_2 = (7 + i)^2$
3. $z_3 = (2 - i)(2 + i)$
4. $z_4 = (3 - 2i)^4$
5. $z_5 = \frac{1}{2 - i}$
6. $z_6 = \frac{-1 + 2i}{2 - 3i}$
7. $z_7 = \frac{3 + 6i}{3 - 4i}$
8. $z_8 = \left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2$

Exercice 2 : Écrire sous forme trigonométrique les complexes suivants :

1. $z_1 = 20$
2. $z_2 = -7$
3. $z_3 = 7i$
4. $z_4 = 3 - 3i$
5. $z_5 = -\sqrt{3} + i$
6. $z_6 = \sqrt{6} + 3i\sqrt{2}$
7. $z_7 = \frac{4}{1 + i}$
8. $z_8 = -5e^{3i\pi/10}$

Exercice 3 : On considère les complexes

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_3 = \sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{6}}.$$

Donner la forme trigonométrique, puis la forme algébrique de complexes $z_1 z_2 z_3$, $\frac{z_1}{z_2 z_3}$ et $(z_2)^2$.

Exercice 4 : Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z_1 = (\sqrt{3} + i)^5$
2. $z_2 = \frac{(1 + i)^4}{(\sqrt{3} - i)^3}$
3. $z_3 = (\sqrt{2} - e^{i\pi/4})^{15}$

Exercice 5 : On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Écrire les nombres suivants sous forme algébrique.

1. $z_1 = j^3$
2. $z_2 = j^2 + j + 1$
3. $z_3 = (j - 1)(j^2 - 1)$
4. $z_4 = (1 + j)^3$
5. $z_5 = (1 - j)^3$

Exercice 6 : La méthode de l'arc médian est une astuce consistant à écrire, pour $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} \right) \quad \text{et} \quad e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} \right).$$

1. Vérifier les formules ci-dessus.

On considère maintenant les nombres complexes :

$$A = e^{i\pi/3} + e^{i\pi/4} \quad ; \quad B = e^{2i\pi/3} - i \quad ; \quad C = 1 + e^{7i\pi/6} \quad ; \quad D = 1 - e^{3i\pi/4}.$$

2. À l'aide de la méthode de l'arc médian, trouver l'écriture des nombres A, B, C, D sous forme trigonométrique.
3. Écrire les nombres A, B, C, D sous forme algébrique et calculer leurs modules.
4. Dédurre des différentes écritures de A une formule explicite pour $\cos(\pi/24)$, puis pour $\sin(\pi/24)$.

Exercice 7 :

1. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 + i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{z_2}{z_1}.$$

2. a. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- b. En déduire sans calcul supplémentaire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 8 : Soit u et v sont deux nombres complexes. Montrer que : $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Exercice 9 : Soit z un nombre complexe. Montrer que :

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = 1/z.$$

Exercice 10 : Soit z et z' deux complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$.

Montrer que le nombre $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Exercice 11 : Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $\sin x + \cos x + 1 = 0$.

Exercice 12 : Linéariser les expressions suivantes :

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------|------------------------------|
| 1. $\cos^3(x)$ et $\sin^3(x)$ | 3. $\sin^5(x)$ | 5. $\cos^3(x)\sin(2x)$ |
| 2. $\sin^4(x)$ | 4. $\sin^2(x)\cos^2(x)$ | 6. $\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)$ |

Exercice 13 : Soit $x \in \mathbf{R}$.

1. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$.
3. Exprimer $\sin(6x)$ comme produit de $\sin(x)$ et d'un terme ne dépendant que de $\cos(x)$.

Exercice 14 : Déterminer les racines réelles ou complexes des expressions :

1. $P(x) = x^2 - 4x + 6$.
2. $Q(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Exercice 15 : Déterminer pour chacun des systèmes suivants les couples, réels ou complexes, solutions de :

$$(S_1) \begin{cases} x+y=1 \\ xy=2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2) \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=1 \end{cases}$$