I Systèmes linéaires simples

Exercice 1 : Résoudre le système suivant d'inconnues réelles :

$$(S_1) \quad \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ x + y + 2z = 14 \end{cases}$$

Exercice 2 : Résoudre le système suivant d'inconnues réelles :

$$(S_2) \quad \begin{cases} -2x + 5y + z + t = 1 \\ 3x - 2y + 4z + t = 3 \end{cases}$$

Exercice 3 : Déterminer le rang du système suivant et le résoudre dans $\mathbf{R}^4$. Est-il de Cramer ?

$$(S_3) \quad \begin{cases} x - y + z - t = 3 \\ -3x + y + 2z + t = -8 \\ x + 3y - z + 2t = 5 \\ 2x - 3y + z - 3t = 3 \end{cases}$$

Exercice 4 : Déterminer le rang du système suivant et le résoudre dans $\mathbf{R}^3$. Est-il de Cramer ?

$$(S_4) \quad \begin{cases} 2x + 7y - 3z = 2 \\ 3x + y + z = 4 \\ 4x - 5y + 5z = 5 \end{cases}$$

Exercice 5 : Déterminer le rang du système suivant et le résoudre dans $\mathbf{R}^4$. Est-il de Cramer ?

$$(S_5) \quad \begin{cases} x + y + 3z + 13t = 7 \\ 2x - y + 3z + 2t = 5 \\ x - y + z - 3t = 1 \\ x + 2z + 5t = 4 \end{cases}$$

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbf{R}^3$ le système suivant :

$$(S_6) \quad \begin{cases} 4y + z = 20 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x + z = 5 \\ x + y - z = 10 \end{cases}$$

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbf{R}^3$ le système suivant :

$$(S_7) \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + y - z = 3 \\ 5x + 5y - 9z = 7 \\ 2x - 6y + 14z = -2 \end{cases}$$

Exercice 8 : Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, d pour que les systèmes suivants soit compatibles :

1. $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 5y + 3z = b \\ x + 9z = c \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 3y = a \\ 3x + y = b \\ x + 7y = c \\ 2x + 4y = d \end{cases}$

II Systèmes linéaires à paramètres

Exercice 9 : Soit m un réel. Résoudre suivant la valeur du paramètre m le système :

$$(S_m) \quad \begin{cases} mx + y = m^2 \\ x + my = 1 \end{cases}$$

Exercice 10 : Résoudre le système à paramètre réel m suivant :

$$(S_m) \quad \begin{cases} x - my = -3 \\ (m+1)x - 2y = m^2 - 1 \end{cases}$$

Exercice 11 : Résoudre le système de paramètre réel m suivant :

$$(S_m) \quad \begin{cases} (m+1)x - 2my = 2m + 4 \\ (m-1)x - 4my = 2m + 2 \end{cases}$$

Exercice 12 : Soit m un réel. Résoudre suivant la valeur du paramètre m le système :

$$(S_m) \quad \begin{cases} (3-m)x - 2y + 3z = 0 \\ x - my + 2z = 0 \\ (2-m)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 13 : Soit m un réel. Résoudre suivant la valeur du paramètre m le système :

$$(S_m) \quad \begin{cases} x + y + z = m + 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 14 : Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Trouver pour quelles valeurs de λ le système suivant d'inconnue (x, y, z) élément de $\mathbf{C}^3$ n'est pas un système de Cramer :

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} 5x - 8y + 4z = \lambda x \\ x = \lambda y \\ y = \lambda z \end{cases}$$

On pourra déterminer des nombres a, b, c tels que : $\forall \lambda \in \mathbf{C},\ -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 1)(a\lambda^2 + b\lambda + c)$.

Exercice 15 : Donner une équation ou un système d'équations de chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^n$ (en commençant bien sûr par préciser l'entier n).

1. $A = \{(\alpha + \beta, \alpha - \beta, 2\alpha + \beta, 2\alpha - \beta)\ ;\ (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\}$.
2. $B = \{(2s + 3, -s - 1)\ ;\ s \in \mathbf{R}\}$.
3. $C = \{(2s, t - s - 1)\ ;\ (s, t) \in \mathbf{R}^2\}$.
4. $D = \{(2 - u, 1 - 2u, 0)\ ;\ u \in \mathbf{R}\}$.
5. $E = \{(x, 2x - t + 1, x - 3t - 1, t)\ ;\ (x, t) \in \mathbf{R}^2\}$.