Exercice 1 : Vrai ou faux ? Justifier

1. La suite définie par $u_n = n - \sqrt{1+n}$ pour $n \geqslant 1$ est majorée car : $\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant n$.
2. Une suite strictement croissante tend vers $+\infty$.
3. Si (u_n) est monotone, alors (u_n) est convergente si et seulement si elle est majorée.
4. Une suite strictement positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang.
5. Si (u_n) converge, alors (u_n) est monotone.
6. Une suite positive et non majorée diverge vers $+\infty$.
7. $(|u_n|)$ converge si, et seulement si, (u_n) converge.
8. Si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0, alors (u_n) converge.
9. Si (u_n) converge, et si (v_n) diverge, alors il se peut que la suite $(u_n + v_n)$ converge.

Exercice 2 : Soient (u_n) une suite réelle, M un réel positif et ℓ un réel quelconque tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant M \cdot |u_n - \ell|.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant M^n \cdot |u_0 - \ell|$.
2. (*Application*) On suppose que $M = \dfrac{1}{2}$ et que $u_0 \neq \ell$.
   a. Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ.
   b. Trouver un rang n_0 (en fonction de ℓ et u_0) tel que : $\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

Exercice 3 : Étudier la convergence des suites données par les termes généraux suivants :

1. $s_n = \dfrac{\sin(3n^2 + 5n - 7)}{n}$
2. $t_n = \sqrt{n} + \cos n$
3. $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
4. $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ $\quad (x \in \mathbf{R}$ est fixé)

Exercice 4 : Dans chacun des cas suivants, étudier le comportement de la suite (u_n) quand $n \to +\infty$. Lorsque (u_n) est une suite convergente, précisez ce que l'on peut dire sur sa limite.

1. (u_n) vérifie : $\forall\, n \in \mathbf{N}^\star,\ |u_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. (u_n) est une suite croissante et : $\forall\, n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n < 1 + \dfrac{1}{n}$.
3. (u_n) est une suite décroissante et : $\forall\, n \in \mathbf{N}^*,\ 1 - \dfrac{1}{n} < u_n < 2 + \dfrac{1}{n+1}$.
4. (u_n) vérifie : $\exists\, n_0 \in \mathbf{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_n$.

Exercice 5 : Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star, S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 6 : Montrer que les suites (u_n) et (v_n) suivantes sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Exercice 7 : Vrai ou faux ? Justifier

1. $u_n \sim v_n$ si, et seulement si, $u_n - v_n$ tend vers 0.
2. $u_{n+1} \sim u_n$.
3. $u_n \sim v_n$ implique $u_n + w_n \sim v_n + w_n$.
4. $u_n \sim v_n$ implique $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$.

5. si (u_n) et (v_n) sont à valeurs strictement positives, $u_n \sim v_n$ implique $\ln u_n \sim \ln v_n$.
6. Deux suites équivalentes sont de même monotonie.
7. Si $u_n \sim v_n$ et $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n \leqslant w_n$, alors : $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ v_n \leqslant w_n$.

Exercice 8 : Soit (u_n) la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbf{N}^\star, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Étudier la nature de la suite (u_n).
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.
3. En déduire un équivalent de (u_n).

Exercice 9 : Donner un équivalent simple et étudier la nature de la suite :

1. $r_n = n + 1$
2. $s_n = n + \ln n$
3. $t_n = n + e^n$
4. $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$
5. $v_n = \sqrt{n+1} - \ln n$
6. $w_n = \dfrac{n^3 + 3n - 2}{n^2 - 6}$
7. $x_n = \left(-1 + \dfrac{\sin n}{n}\right)(n^2 + e^{-n} + 1)$

Exercice 10 : Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par :

1. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{3^n + n^3}{4^n + n^4}$
2. $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n = \dfrac{n + \sin n}{n + \ln n}$
3. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$
4. $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n = \dfrac{n}{n^{\ln n}}$
5. $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
6. $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right)^n$
7. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \quad a > b \geqslant 0$

Exercice 11 : Trouver un équivalent simple et déterminer la limite de :

1. $u_n = (n + 3\ln n)e^{-(n+1)}$
2. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{(n^2-n+1)^{1/3}}$
4. $u_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{n^2+1}$
5. $u_n = \dfrac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2+1}$
6. $u_n = \dfrac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$
7. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
8. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
9. $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

Exercice 12 : Déterminer les limites de : $u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2+2}\right)}$ et $v_n = \left(1 + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$.

Exercice 13 : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4, \\ \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$

1. Étudier la fonction f telle que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
2. En déduire un intervalle I stable par f tel que $u_0 \in I$.
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_n$ existe et $u_n \in I$.
4. Étudier la monotonie de (u_n).
5. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 14 : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}. \end{cases}$

1. Étudier la fonction f telle que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrer que $I = [0, 1]$ est stable par f, puis que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_n$ existe et $u_n \in I$.
3. Étudier les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
4. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.