Exercice 1 :
Soient A, B, C des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Si $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
2. Si $A^2 = A$, alors $A = I_2$ ou $A = 0$.
3. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
4. Si $AB = 0$ et A est inversible alors $B = 0$.
5. Si $AB = CB$ et B est inversible alors $A = C$.
6. $AB + A = A(B + 1)$.
7. $AB + CA = A(B + C)$.

Exercice 2 : Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Calculer lorsque cela a un sens :

$$3A + 5B, \quad BA, \quad AB, \quad AC - 2B, \quad (B - 2I_2)^2, \quad C^3, \quad AE, \quad CE, \quad DE \quad \text{et} \quad ED.$$

Exercice 3 :
Soient A et B deux matrices telles que $ABAB = 0$. Développer $(BA)^3$ et montrer que $(BA)^3 = 0$.

Exercice 4 : Soit A, B, C, D des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Factoriser les expressions $A + 2AB$ et $A - 3BA$.
2. Soit P une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversible telle que $P^{-1}CP = D$.
   Exprimer C en fonction de P et D. Pour $n \in \mathbf{N}$, exprimer C^n en fonction de P et D^n.

Exercice 5 : Soit A une matrice de taille $n \times p$. On note $M = A^tA$ et $N = {}^tAA$.

1. Vérifier que les matrices M et N sont bien définies, et préciser leurs tailles.
2. Montrer que M et N sont des matrices symétriques.

Exercice 6 : Soient $(x, y, z) \in \mathbf{K}^3$ et $(X, Y, Z) \in \mathbf{K}^3$ défini par : $(S) \begin{cases} X = 2x - 3y + 4z \\ Y = x + y + z \\ Z = x - z \end{cases}$
Écrire sous forme matricielle le système (S).

Exercice 7 : Soient A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. Résoudre le système matriciel d'inconnue X : $AX = B$.

Exercice 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 puis $M = A^3 - 5A^2 + 9A$.
2. En factorisant M, déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A, A^2 et I_3.
3. Trouver l'expression de A^{-1} par une méthode directe.

Exercice 9 : On considère les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^n pour tout entier naturel n.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 10 : Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Calcul de* A^n (méthode 1) :
   Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer A^n en écrivant A sous la forme $A = I_3 + N$.
2. *Calcul de* A^n (méthode 2) :
   a. Montrer par récurrence que :
   $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \exists\, (a_n, b_n) \in \mathbf{R}^2 \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On exprimera a_{n+1} *et* b_{n+1} *en fonction de* a_n *et* b_n.
   b. En déduire une expression de A^n, pour tout entier naturel n.
3. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 11 : Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
   La matrice A est-elle inversible ?
2. Pour λ dans $\mathcal{S}$, calculer $(A - \lambda I_2)^2$.
3. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A, I_2.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$.
5. Exprimer pour tout entier naturel n, α_n et β_n en fonction de n.
   On pourra montrer que la suite (α_n) *ou la suite* (β_n) *vérifie une relation linéaire d'ordre 2.*
6. En déduire une expression de A^n, pour tout entier naturel n.

Exercice 12 :
On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par la donnée de leur premier terme a_0, b_0 et :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 10a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 18a_n - 11b_n \end{cases}$$

On pose alors pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire les relations précédentes sous forme matricielle à l'aide de U_{n+1}, U_n et d'une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ que l'on déterminera.
2. Exprimer alors U_n en fonction de U_0, A et n.
3. On pose ensuite $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
4. On pose $D = P^{-1}AP$.
   a. Calculer D puis calculer D^n pour tout entier naturel n.
   b. Exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D, puis montrer que pour tout entier n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire pour tout entier n les expressions explicites de a_n et b_n en fonction de a_0, b_0 et n.