

Exercice 1 : Pour chacune des situations suivantes, décrire l'ensemble des objets à dénombrer en termes de listes (ordonnées ou non, avec ou sans répétition, de longueur fixée ou non, prises dans quel ensemble), puis indiquer leur nombre.

1. Nombre de mains possibles à la belote (8 cartes dans un jeu de 32).
2. Nombre de mains possibles au poker (5 cartes dans un jeu de 52).
3. Nombre de tirages possibles en lançant successivement 5 dés ordinaires.
4. Nombres de tirages possibles en jouant 11 fois de suite à pile ou face.
5. Nombre de tirages possibles en prélevant successivement, sans remise, 3 cartes dans un jeu de 32.
6. Nombre de tirages possibles en prélevant successivement, avec remise, 3 cartes dans un jeu de 32.
7. Nombre d'anagrammes du mot *chaise*.
8. Nombre de répartitions possibles de 3 sujets entre les 3 élèves d'un groupe de colle.

Exercice 2 : Un jeu de cartes contient 32 cartes. On en prend 3 successivement, sans remise. De combien de façons peut-on opérer pour obtenir au moins un cœur ?

Exercice 3 : Une urne contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6 et 5 boules noires numérotées de 1 à 5. On tire successivement 4 boules sans remise. Combien de résultats amènent 3 boules blanches et une boule noire ?

Exercice 4 :

1. On fixe un alphabet réduit aux six lettres A,B,C,D,E,F.
Combien y a-t-il de mots de cinq lettres :
 - a. en tout ?
 - b. avec 5 lettres distinctes ?
 - c. avec deux *A*, trois *B* ?
 - d. avec deux *A*, deux *B*, un *C* ?
 - e. avec exactement deux *A* et un *B* ?
2. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot *BCPST* ?
3. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot *abracadabra* ?

Exercice 5 : Un éleveur possède quinze bœufs charolais et douze limousins. Il constitue un troupeau de dix bœufs pour les conduire au pré.

1. Combien y a-t-il de troupeaux possibles ?
2. Combien de ces troupeaux contiennent autant de charolais que de limousins ?
3. Combien de ces troupeaux contiennent au moins deux charolais ?

Exercice 6 : Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires indiscernables. On tire successivement 6 boules de l'urne en remettant systématiquement la boule tirée.

1. Quel est le nombre de tirages possible ?
2. Combien de ces résultats amènent :
 - a. 5 boules blanches et une boule noire, dans cet ordre ?
 - b. 1 boule noire au plus ?
 - c. 3 boules blanches et 3 boules noires ?
 - d. une boule blanche au moins ?

Exercice 7 : Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur (cœur, pique, carreau, trèfle). Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent au moins un as ?
3. Combien contiennent exactement un roi ?
4. Combien contiennent au moins un cœur ou une dame ? (attention à la dame de cœur !)
5. Combien ne contiennent que des cartes de 2 couleurs au plus ?

Exercice 8 : On range sur une étagère dix livres deux à deux distincts, dont les trois oeuvres de français, deux livres de SVT, deux livres de physique-chimie et trois livres de maths.

1. Quel est le nombre total de dispositions ?
2. Quel est le nombre de dispositions qui placent côte à côte les trois livres de maths ?
3. Quel est le nombre de dispositions qui regroupent les livres par matières ?

Exercice 9 : On dispose 4 pions numérotés de 1 à 4 sur 3 cases numérotées de 1 à 3. Une case peut éventuellement contenir plusieurs pions.

De combien de façons peut-on opérer de sorte qu'une case au moins soit vide ?

Exercice 10 : Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard et simultanément.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien amènent deux chaussures de la même couleur ?
3. Combien amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien permettent de reconstituer une vraie paire de chaussures ? Une paire est constituée d'une chaussure gauche et d'une chaussure droite de la même couleur.

Exercice 11 : On considère un ensemble E à n éléments et une partie A fixée de E , de cardinal p .

1. Quel est le nombre de parties de E contenant A ?
2. Quel est le nombre de parties de E disjointes de A ?

Exercice 12 : On appelle *jolimot* un mot qui s'écrit uniquement avec les lettres a et b , sans faire apparaître deux a consécutifs (peu importe que ce mot soit ou non dans le dictionnaire). Pour tout entier $n \geq 1$, on note j_n le nombre de jolimots de n lettres.

1. Énumérer tous les jolimots de cinq lettres au plus, et en déduire les nombres j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 .
2. Soit $n \geq 3$ un entier fixé. Montrer que $j_n = j_{n-1} + j_{n-2}$.
Indication : on pourra distinguer les jolimots commençant par la lettre a ou par la lettre b .
3. Combien existe-t-il de jolimots de dix lettres ?

Exercice 13 : On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires. On tire les boules une à une successivement, sans remise, jusqu'à vider l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages amènent la dernière boule blanche en k -ième position ?

3. En déduire :
$$\sum_{k=a}^{a+b} \binom{k-1}{a-1} = \binom{a+b}{a}$$

Exercice 14 : Soient E et F deux ensembles disjoints ayant respectivement p et q éléments, et r un entier tel que $r \leq p + q$.

1. En dénombrant de deux façons le nombre de parties à r éléments de $E \cup F$,
Montrer que

$$\sum_{i=0}^r \binom{p}{i} \binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}.$$

2. En déduire une expression simple de :
$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2.$$

Exercice 15 : Les 123 élèves de BCPST offrent une boîte contenant 123 chocolats aux trois professeurs de maths. Combien y a-t-il de répartitions telles que chacun reçoive au moins un chocolat ?

Exercice 16 : Cinq élèves ont laissé leur blouse en TP de biologie. La semaine suivante, chacun d'eux en prend une au hasard.

De combien de façons peuvent-ils les choisir de sorte que l'un au moins d'entre eux retrouve sa blouse ?