Exercice 1 : Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Une fonction qui admet en un point a de son ensemble de définition des limites finies à droite et à gauche qui sont égales est continue en a.
2. La fonction partie entière est continue en 0.
3. Si f est continue en a et $f(a) > 0$, alors f est strictement positive dans un voisinage de a.
4. Toute fonction continue sur un intervalle borné est bornée.

Exercice 2 : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x + \cos x & \text{si } x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{si } \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \\ \dfrac{x^2}{2} + b & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

Peut-on déterminer des réels a et b tels que la fonction f soit continue sur $\mathbf{R}$?

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$.
Déterminer le domaine de continuité de f.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4} - 2}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est continue en tout point de $\mathcal{D}_f$.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité au point $x = 0$?

Exercice 5 : Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, continue en 0 et vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}, \forall\, n \in \mathbf{N},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que f est constante.

Exercice 6 : Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ et telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 7 : Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ et telle que $[a, b] \subset f([a, b])$.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 8 : Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a, b]$ telles que :
$f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 9 :
Une voiture parcourt 90km en une heure (sans rouler nécessairement à vitesse constante).
On admet que la distance $f(t)$ parcourue par la voiture au temps t (en heures) est une fonction continue sur $[0, 1]$.
En considérant la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $g(t) = f(t + \frac{1}{2}) - f(t)$, montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel la voiture a parcouru exactement 45km.

Exercice 10 : Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 11 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathcal{D}$ sur $\mathbf{R}$.
4. Déterminer la bijection réciproque de f.

Exercice 12 : On considère pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$ l'équation suivante :

$$(E_n) \quad x^5 + x + 1 = n.$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $f(x) = x^5 + x + 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, (E_n) admet une unique solution, notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante et étudier sa convergence.
3. Donner un équivalent de x_n (*partir de l'équation* (E_n)).

Exercice 13 : Soit n un entier naturel non nul et $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$. On la note u_n.
2. Calculer $f_{n+1}(u_n)$. En déduire la monotonie et la convergence de la suite (u_n).
3. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   a. Montrer que : $\forall\, n \geqslant 2, \quad \dfrac{1-(u_n)^{n+1}}{1-u_n} = 2.$
   b. Justifier que : $\forall\, n \geqslant 2,\ 0 \leqslant (u_n)^{n+1} \leqslant (u_2)^{n+1}$.
   c. En déduire que $\ell = \dfrac{1}{2}$.