Devoir Maison n°1

Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right)$.

1. Préciser rapidement l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f , et son ensemble de dérivabilité.
2. (a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
(b) En déduire l'équation d'une asymptote Δ_1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f .
3. (a) Montrer que : pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = x + \ln(2) + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right)$.
(b) En déduire l'équation d'une asymptote Δ_2 à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
4. (a) Factoriser l'expression $2t^2 + 8t - 1$, où t représente un réel.
(b) On pose $\alpha = \ln\left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$.
Montrer que : $2e^{2x} + 8e^x - 1 > 0$ si et seulement si $x > \alpha$.
(c) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
(d) En déduire le tableau de variations complet de la fonction f .
(e) Montrer que f admet un minimum m sur $\mathcal{D}_f$,
puis que $m = \ln(6\sqrt{2} - 8)$.
5. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en 0.
6. (a) Soit A le point d'intersection entre Δ_1 et Δ_2 .
Déterminer les coordonnées de A , et montrer que $A \in \mathcal{C}_f$.
(b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ_1 sur $] -\infty, -2\ln(2)]$.
(c) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ_2 sur $[-2\ln(2), +\infty[$.
(d) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T sur $\mathcal{D}_f$.
(e) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ en utilisant tous les renseignements des questions précédentes.

On donne les approximations suivantes :

$$\alpha \approx -2,1 \quad m \approx -0,72 \quad \ln(2) \approx 0,69 \quad 2\ln(2) \approx 1,39$$

* * *