$\varphi\chi00$: Mesures et analyse dimensionnelle

Introduction

Plan

Documents

TD-$\varphi\chi0$

Exercices

★ : Ex. 1 & 4
★★ : Ex. 2, 3 & 5
★★★ : Ex. 6

Capacités exigibles

Vérifier l'homogénéité d'une expression littérale à partir d'une analyse dimensionnelle des termes présents.
Définir un ordre de grandeur (durée, longueur) par analyse dimensionnelle d'une équation modélisant un phénomène.

Remarques préliminaires (à lire et relire sans modération)

Justification : tout résultat doit être justifié, un raisonnement doit être explicité pour être compris et vérifié.
Type de raisonnement : ne cherchez pas à répondre immédiatement à la question. Les questions deviennent trop compliquées pour accepter une réponse directe. Il faut prendre le raisonnement au début et conclure sur le résultat demandé. Vous formerez ainsi un raisonnement linéaire, en partant du début et en arrivant à la fin. Vous préférerez des « donc » aux « car ».
Interprétation : vous devrez bien faire la différence entre « interpréter un résultat » d'expérience et « le décrire ». Écrire que « la grandeur diminue avec le temps » est une description du résultat, elle est utile mais ne suffit pas. On demande ensuite d'expliquer pourquoi cette grandeur diminue avec le temps.
Calcul littéral : on vous demande un calcul littéral complet, sans inclure de valeurs numériques données dans le texte. Votre résultat sera donc exposé sous la forme d'une expression littérale en fonction des données du texte. Vous vérifierez évidemment l'homogénéité de l'expression.
Résultat numérique : vous poserez le calcul exactement comme la formule littérale est écrite, et vous le taperez ainsi à la machine. Ne vous dispensez pas de l'étape d'écriture de l'expression numérique, elle est capitale pour éviter les erreurs (unités, valeurs numériques fausses...), pour pouvoir trouver les erreurs et pour le correcteur. Vous taperez deux fois le résultat sur la machine, plutôt que de relire sur l'écran votre calcul.
Chiffres significatifs : vous présenterez le résultat en notation scientifique avec le nombre de chiffres significatifs néessaires ($\cdot,\cdot\cdot\times 10^{z}$, le $\cdot$ avant la virgule est un nombre entier compris entre 1 et 9, les deux autres sont des nombres compris entre 0 et 9, z est un entier relatif). Vous arrondirez (à partir de 5, on arrondit à la valeur supérieure) et vous ne tronquerez pas le résultat.
Applications numériques intermédiaires : dans la majorité des cas, oublier les applications numériques intermédiaires ! si jamais elles sont indispensables, conserver la valeur en mémoire de la machine pour une utilisation ultérieure et NE PAS UTILISER UNE VALEUR ARRONDIE POUR UN CALCUL ULTÉRIEUR.
Conclusion : vous conclurez sur la valeur numérique (cohérence, valeur attendue ou non...) même si ce n'est pas demandé, cela montre que vous réfléchissez et vous permet de détecter des erreurs.

I Grandeurs physiques et unités

A) Grandeur physique

Définition 1 : Grandeur physique

Une grandeur physique est la propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence appelée unité. La mesure d'une grandeur physique X peut donc toujours s'écrire sous la forme :

$$X = x \text{ unité} \tag{1}$$

avec : x : un réel ;
unité : l'unité choisie pour évaluer la grandeur.

B) Écriture d'une grandeur numérique

Propriété 1 : Écriture d'une grandeur numérique

— Il est **IMPÉRATIF** de préciser l'unité d'une grandeur physique, sinon le résultat n'a aucun sens.

— Le résultat d'un calcul numérique doit être en accord avec la **précision des données utilisées** pour effectuer ce calcul, il faut respecter les règles sur les **chiffres significatifs** :

1. Dans le cas de **multiplications ou divisions** : le résultat est donné avec le même nombre de chiffres significatifs que celui de la donnée la moins précise, en utilisant la notation scientifique.
2. Dans le cas d'**additions ou soustractions** : le résultat est donné avec le même nombre de décimales (chiffres après la virgule) que celui de la donnée la moins précise (à condition de garder la même puissance de 10).

C) Unités du système international (U.S.I.)

Il n'y a que quelques unités du système international, les autres unités découlent, par des relations mathématiques, des premières.

Grandeur	Unité	Symbole
Longueur		
Masse		
Temps		
Intensité du courant		
Température		
Quantité de matière		
Intensité lumineuse		

Table 1 – Unités du système international

Remarque

Bien que les angles soient des grandeurs sans unité, pour éviter des confusions (entre les degrés et les radians) on attribue à un angle plan l'unité complémentaire radian.

Rappel : π rad $= 180°$

Il existe pour chaque unité un volant de multiples et de sous-multiples à connaître par cœur :

Multiple	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}
Préfixe	femto	pico	nano	micro	milli	centi	déci	déca	hecto	kilo	méga	giga	téra	péta
Symbole	f	p	n	μ	m	c	d	da	h	k	M	G	T	P

Table 2 – Multiples et sous-multiples

D) Unités dérivées du système international

Les unités dérivées sont nombreuses et viennent compléter les unités de base. Elles peuvent avoir des noms spéciaux mais peuvent toujours être exprimées à partir des unités de base. La liste suivante n'est pas exhaustive et les unités sont **à connaître**.

Grandeur et relation		**Unités composées S.I.**	**Unités usuelles**
Longueur	L	m	
Surface	$S = L^2$	m^2	
Volume	$V = L^3$	m^3	
Temps	T	s	
Vitesse	$v = L/T$	$m{\cdot}s^{-1}$	
Accélération	$a = v/T$	$m{\cdot}s^{-2}$	
Fréquence	$f = 1/T$	s^{-1}	
Pulsation	$\omega = 2\pi/T$	$rad{\cdot}s^{-1}$	
Masse	M	kg	
Masse volumique	M/V	$kg{\cdot}m^{-3}$	
Force	$M \times a$	$kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}$	
Travail	E ou $W = F \times L$	$kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}$	
Puissance	$P = E/T$	$kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-3}$	
Pression	$p = F/S$	$kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-2}$	
Temps	T	s	
Vitesse	$v = L/T$	$m{\cdot}s^{-1}$	
Accélération	$a = v/T$	$m{\cdot}s^{-2}$	
Fréquence	$f = 1/T$	s^{-1}	
Pulsation	$\omega = 2\pi/T$	$rad{\cdot}s^{-1}$	
Intensité du courant	I	A	
Charge	$q = I/T$	$A{\cdot}s$	
Ddp, fem	e ou $U = P/I$	$A^{-1}{\cdot}kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-3}$	
Résistance	$R = U/I$	$A^{-2}{\cdot}kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-3}$	
Conductance	$G = 1/R$	$A^2{\cdot}kg^{-1}{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^3$	
Capacité	$C = q/U$	$A^2{\cdot}kg^{-1}{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^4$	

Table 3 – Unités dérivées du système international

Exercice 1

1. Donner la valeur de la masse volumique de l'eau liquide dans les unités suivantes : $kg{\cdot}L^{-1}$, $kg{\cdot}m^{-3}$, $g{\cdot}L^{-1}$, $g{\cdot}m^{-3}$, $g{\cdot}dm^{-3}$.
2. Donner la valeur du volume massique de l'eau liquide dans les unités suivantes : $L{\cdot}kg^{-1}$, $m^3{\cdot}kg^{-1}$, $L{\cdot}g^{-1}$, $m^3{\cdot}g^{-1}$.

E) Unités exotiques

Cependant par habitude ou pour des raisons pratiques certaines unités n'appartenant pas au système international sont utilisées, en voici une liste non exhaustive :

Grandeur et relation	Nom	Conversion
Longueur	mille marin	1852 m
	année-lumière	1 al $= 9,461 \cdot 10^{15}$ m
Surface	are	1 are $= 100$ m^2
Volume	**litre**	$\mathbf{1\ L = 10^{-3}\ m^3}$
	corde	1 corde $= 1/3$ m^3
Angle	**tour**	$\mathbf{1\ tour = 2\pi\ rad}$
	degré	$\mathbf{1^\circ = 2\pi/360}$
Temps	**minute**	**1 min = 60 s**
	heure	**1 h = 3 600 s**
	jour	**1 j = 86 400 s**
Vitesse	**kilomètre par heure**	$\mathbf{1\ km \cdot h^{-1} = 1/3,6 m \cdot s^{-1}}$
	nœud	1 nœud $= 1852/3600$ m·s^{-1}
Masse	**tonne**	**1 t = 1000 kg**
	unité de masse atomique	1 u.m.a $= 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg
Énergie	**wattheure**	$\mathbf{1\ W \cdot h = 3600\ J}$
	calorie	1 cal = 4,18 J
	électron-volt	$\mathbf{1\ eV = 1,6 \cdot 10^{-19}\ J}$
Pression	**bar**	$\mathbf{1\ bar = 10^5\ Pa}$
	atmosphère	$\mathbf{1\ atm = 1,013 \cdot 10^5\ Pa}$
	millimètre de mercure	1 mmHg = 133,3 Pa
Température	**Degré Celsius**	$\mathbf{T(^\circ C) = T(K) - 273,15}$

Table 4 – Unités hors du système international - *En gras sont notées les unités à connaître*

Exercice 2

Donner la valeur à un chiffre significatif de la vitesse de la lumière dans le vide dans les unités suivantes : m·s^{-1}, km·h^{-1}.

II Analyse dimensionnelle et homogénéité d'une équation

A) Dimension d'une grandeur

Une grandeur physique est un paramètre mesurable qui sert à définir un état ou un objet. Toutes les grandeurs ne sont pas comparables, pour regrouper celles qui le sont, on leur attribue une **dimension** qui caractérise le type de grandeur. À l'instar des unités du système international, on définit sept dimensions fondamentales :

Définition 2 : Homogénéité

Remarque

Deux grandeurs de même dimension peuvent être données dans des unités différentes. Cependant l'analyse de l'unité d'une grandeur permet de retrouver sa dimension (et inversement).

Comme on peut définir les unités à partir des unités S.I., on peut définir la dimension d'une grandeur X, noté $[X]$ à partir des sept dimensions fondamentales telle que :

$$[X] = L^{\alpha} \times T^{\beta} \times M^{\chi} \times I^{\delta} \times \theta^{\epsilon} \times J^{\phi} \times N^{\gamma} \tag{2}$$

Remarque

Certaines grandeurs sont sans dimensions :

- Les grandeurs purement **numériques** ;
- les angles ;
- les rapports de deux grandeurs de même dimension ;
- les arguments des fonctions mathématiques (ex : $\exp(-\frac{t}{\tau})$...).

B) Homogénéité d'une équation

Une relation physique n'a de sens que si les deux expressions de part et d'autre du signe égal ainsi que chaque terme additif ont même dimensions.

Attention : Une relation non homogène est **OBLIGATOIREMENT FAUSSE**.

Propriété 2 : Quelques règles

— Si $A = B + C$ alors

— Si $A = B \times C$ alors

— Si $A = \dfrac{B}{C}$ alors

— Si $A = B^x \times C^y$ alors

— Si $A = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ alors

— Si $A = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ alors

Remarque

D'autre part il faut que les deux membres de l'égalité (inégalité) appartiennent à la même catégorie d'objets mathématiques, ainsi une grandeur vectorielle ne peut être égale à une grandeur scalaire.

C) Analyse dimensionnelle

La vérification de l'homogénéité d'une équation constitue une analyse dimensionnelle. Elle ne peut se faire que si l'expression est littérale, c'est-à-dire qu'aucune grandeur n'a été remplacée par sa valeur numérique (la vérification de l'homogénéité doit être indépendante du choix des unités).

L'analyse dimensionnelle peut aussi permettre de retrouver la dimension et l'unité d'une grandeur si l'on connait une équation liant cette grandeur à d'autres de dimension connue.

Méthode 1 : Analyse dimensionnelle d'une équation

1. Réécrire l'équation à l'aide des dimensions des différentes grandeurs : $[G] = [X]^a \times [Y]^b \cdots$;
2. Remplacer les dimensions $[X]$ par leurs symboles $M, L, T \cdots$;
3. Les deux membres doivent être de même dimension ainsi l'exposant de chaque dimension fondamentale doit être identique de part et d'autre de l'égalité. On peut alors en déduire autant d'équations qu'il y a de dimensions fondamentales ;
4. On résout le système d'équation dont les inconnues sont les exposants a, b $\cdots$.

Attention : les constantes numériques présentes dans l'équation sont **adimensionnées**.

Exercice 3

L'énergie mécanique d'un satellite de masse m en orbite autour d'une planète de masse M à la distance r peut s'écrire :

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - G\frac{Mm}{r}$$

Donner les dimensions des constantes C (constante des aires) et G (constante de gravitation universelle) ainsi que leur unité dans le système international.

L'analyse dimensionnelle peut permettre de prédire la forme d'une loi physique afin de trouver la solution à certains problèmes sans avoir à résoudre d'équation : on peut pour de nombreux phénomènes physiques étudiés exprimer une grandeur caractéristique du phénomène (notée G) en fonction des paramètres influençant le phénomène (notés p_i) sous la forme :

$$G = k \times p_1^\alpha \times p_2^\beta \times \cdots \tag{3}$$

avec $\alpha, \beta, \cdots$ des constantes sans dimension que l'on peut déterminer à l'aide de l'analyse dimensionnelle
k une constante sans dimension qui ne peut pas être déterminée à l'aide de l'analyse dimensionnelle.

Méthode 2 : Analyse dimensionnelle d'une équation

1. Faire la liste de tous les paramètres (indépendants les uns des autres) dont peut dépendre la grandeur caractéristique du phénomène : p_1, p_2 , $\cdots$;
2. Écrire la loi physique sous la forme : $G = k \times p_1^\alpha \times p_2^\beta \times \cdots$;
3. Écrire l'équation dimensionnelle correspondante : $[G] = [p_1]^\alpha \times [p_2]^\beta \times \cdots$ en définissant ensuite les dimensions de chaque grandeur à l'aide les dimensions fondamentales $M, L, T, N, \cdots$;
4. Les deux membres doivent être de même dimension ainsi l'exposant de chaque dimension fondamentale doit être identique de part et d'autre de l'égalité. On en peut déduire ainsi autant d'équations qu'il y a de dimensions ;
5. On résout le système d'équation dont les inconnues sont les exposants $\alpha, \beta, \cdots$.

Attention : la constante numérique k présente dans l'équation est **adimensionnée**.

Cette méthode ne permet pas de déterminer la loi exacte car elle ne permet pas de déterminer la constante k sans dimension , mais l'expérience prouve que cette constante reste souvent de l'ordre de grandeur de l'unité (comprise généralement entre 0,1 et 10, elle fait souvent apparaître un multiple de π). Ainsi on peut déterminer un **ordre de grandeur** de la valeur de G, connaissant les valeurs numériques des paramètres influençant le phénomène.

Exercice 4

Dire, à l'aide d'une analyse dimensionnelle rapide, pour chacune des expressions littérales suivantes, si : le résultat est susceptible d'être juste ou si le résultat est faux.

1. Hauteur maximale atteinte par un projectile de masse m lancé verticalement à la vitesse v, g étant l'accélération de la pesanteur :

$$\text{a.}\quad h = \frac{m \times v^2}{g} \quad ; \quad \text{b.}\quad h = \frac{v^2}{g} \quad ; \quad \text{c.}\quad h = \frac{v^2}{2g}\ .$$

2. Portée horizontale x du tir d'un projectile de masse m dont la vitesse initiale v fait un angle α avec l'horizontale :

$$\text{a.}\quad x = \frac{m \times v^2 \sin(2\alpha)}{2g} \quad ; \quad \text{b.}\quad x = \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{2g} \quad ; \quad \text{c.}\quad x = \frac{v^2 \tan(2\alpha)}{2g}\ .$$

3. Altitude h d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre de rayon R, connaissant la période T et l'accélération de la pesanteur g au niveau du sol :

$$\text{a.}\quad h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times R^2 \times g}{4\pi^2} - R} \quad ; \quad \text{b.}\quad h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times R^2 \times g}{4\pi^2}} - R \quad ; \quad \text{c.}\quad h = \sqrt[3]{\frac{T^4 \times R \times g^2}{4\pi^2}} - R\ .$$

4. Tension U au sein d'un circuit électrique (avec E une tension, R_1, R_2, R_3 des résistances électriques) :

$$U = \frac{R_1 R_2 E}{R_1 R_2 + R_3(1 + R_2)}$$

III Ordre de grandeur

A) Quelques ordres de grandeurs à connaître

Définition 3 : Ordre de grandeur

L'**ordre de grandeur** d'une valeur est la puissance de 10 la plus proche de cette valeur. Ainsi, si l'on dit que "l'ordre de grandeur est d'un mètre" cela signifie que la longueur de l'objet est entre 10 cm et 10 m.

Exemple

- Tour Eiffel : 320 m $= 3,20 \cdot 10^2$ m, son ordre de grandeur est 10^2 m ;
- Mont Everest : 8850 m $= 8,850 \cdot 10^3$ m $\approx 10 \cdot 10^3$ m $= 10^4$ m.

Avant d'entamer un calcul ou la résolution d'un problème, il est important d'avoir une idée, même approximative de la valeur du résultat. Pour s'assurer de la cohérence d'une réponse, il est bon d'avoir quelques exemples en tête :

Ordres de grandeur de longueur (en mètre) :

B) Déterminer un ordre de grandeur et comparer des valeurs

Propriété 3 : Comparaison de deux ordres de grandeur

Deux grandeurs sont du même ordre de grandeur si le quotient de la plus grande par la plus petite est compris entre 1 et 10. Si ce quotient s'écrit $a \cdot 10^n$ avec :

- $a \in [1, 5[$ et n entier, alors ces 2 longueurs sont différentes de n ordres de grandeur ;
- $a \in [5, 10[$ et n entier, alors ces 2 longueurs sont différentes de $n + 1$ ordres de grandeur.

Attention : Pour les calculs il faut exprimer les longueurs dans la même unité !

Document 1 : Résumé en vidéo : l'analyse dimensionnelle

Vidéo : Analyse Dimensionnelle. Comment valider l'homogénéité d'une formule
ProfSCphy propose une vidéo qui résume les notions d'analyse dimensionnelle : comment valider une formule, son homogénéité ? Comment éviter d'écrire des formules farfelues ? Cette vidéo explique l'analyse dimensionnelle par des applications simples. Fondamental !
https://www.youtube.com/watch?v=0sTIXdN1udY