Corrigé du DM n°1 : étude d'une fonction

1. Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $e^x + 2 \neq 0$ et $\dfrac{2e^{2x}+1}{e^x+2} > 0$. En conséquence, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbf{R}.}$

   Par opérations sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur son ensemble de définition : $\boxed{\mathcal{D}_{f'} = \mathbf{R}.}$

2. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc par opérations $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2e^{2x}+1}{e^x+2} = \dfrac{1}{2}$.

   Par composée de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2).}$

   (b) On en déduit que $\boxed{\text{la droite } \Delta_1 \text{ d'équation } y = -\ln(2) \text{ est asymptote horizontale à } \mathcal{C}_f \text{ en } -\infty.}$

3. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. On a : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2e^x(e^x + \frac{1}{2}e^{-x})}{e^x+2}\right) = \ln(2) + \ln(e^x) + \ln\left(\dfrac{e^x + \frac{1}{2}e^{-x}}{e^x+2}\right)$

   $$= \ln(2) + x + \ln\left(\frac{e^x(1 + \frac{1}{2}e^{-2x})}{e^x(1+2e^{-x})}\right)$$

   donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R},\ f(x) = x + \ln(2) + \ln\left(\dfrac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right).}$

   (b) Soit Δ_2 la droite d'équation $y = x + \ln(2)$.

   Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $f(x) - (x + \ln(2)) = \ln\left(\dfrac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right) = \delta(x)$.

   Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc par opérations : $\lim\limits_{x\to+\infty} \delta(x) = \ln(1) = 0$.

   Ainsi, $\boxed{\text{la droite } \Delta_2 \text{ d'équation } y = x + \ln(2) \text{ est asymptote oblique à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty.}$

4. (a) On considère le trinôme $2t^2 + 8t - 1$. Son discriminant vaut $\Delta = 72 > 0$ donc on a 2 racines réelles : $t_1 = \dfrac{-8-\sqrt{72}}{4} = \dfrac{-8-6\sqrt{2}}{4} = -2 - \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ et $t_2 = -2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

   En conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ 2t^2 + 8t - 1 = 2(t-t_1)(t-t_2).}$

   (b) On pose $g(x) = 2e^{2x} + 8e^x - 1 = 2(e^x)^2 + 8e^x - 1$.

   D'après la question précédente, et en posant $t = e^x$, on a : $g(x) = 2(e^x - t_1)(e^x - t_2)$.

   $t_1 < 0$ donc $e^x - t_1 > 0$ pour tout x. Ainsi, $g(x)$ est du signe de $e^x - t_2$.

   On résout : $e^x - t_2 > 0 \Leftrightarrow e^x > t_2 \Leftrightarrow x > \ln(t_2) = \alpha$ par stricte croissance du ln sur $\mathbf{R}_+^\star$.

   Conclusion : $\boxed{2e^{2x} + 8e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \alpha.}$

   (c) Pour tout x réel, on pose $u(x) = \dfrac{2e^{2x}+1}{e^x+2}$.

   Par opérations : $u'(x) = \dfrac{4e^{2x}(e^x+2) - e^x(2e^{2x}+1)}{(e^x+2)^2} = \dfrac{2e^{3x} + 8e^{2x} - e^x}{(e^x+2)^2}$

   $f(x) = \ln(u(x))$ donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2e^{3x} + 8e^{2x} - e^x}{(e^x+2)^2} \times \dfrac{e^x+2}{2e^{2x}+1}$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } x, \text{ on a : } f'(x) = \dfrac{e^x(2e^{2x} + 8e^x - 1)}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}.}$

   (d) Pour tout x réel, $e^x > 0$, $e^x + 2 > 0$ et $2e^{2x} + 1 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $2e^{2x} + 8e^x - 1$.

   On peut conclure grâce à la question **4b** :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-\ln(2)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

(e) f admet un minimum m sur $\mathbf{R}$ d'après le tableau précédent. On a : $m = f(\alpha) = \ln\left(\dfrac{2e^{2\alpha}+1}{e^{\alpha}+2}\right)$.

D'une part, $e^{2\alpha} = (e^{\alpha})^2 = (e^{\ln(-2+\frac{3}{2}\sqrt{2})})^2 = \left(-2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{17}{2} - 6\sqrt{2}$

donc $2e^{2\alpha}+1 = 18-12\sqrt{2}$. D'autre part, $e^{\alpha} = -2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ donc $e^{\alpha}+2 = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

On a donc : $m = \ln\left(\dfrac{18-12\sqrt{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\dfrac{12-8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$ donc $\boxed{m = \ln(6\sqrt{2}-8).}$

5. $f'(0) = \dfrac{e^0(2e^0+8e^0-1)}{(e^0+2)(2e^0+1)} = \dfrac{9}{9} = 1$ et $f(0) = \ln\left(\dfrac{2e^0+1}{e^0+2}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{3}\right) = \ln(1) = 0.$

$\boxed{\text{La courbe } \mathcal{C}_f \text{ admet en 0 une tangente } T \text{ d'équation : } y = x.}$

6. (a) Soit $A(x_A, y_A) = \Delta_1 \cap \Delta_2$. $A \in \Delta_1$ donc $y_A = -\ln(2)$.

$A \in \Delta_2$ donc $y_A = x_A + \ln(2) \Leftrightarrow -\ln(2) = x_A + \ln(2) \Leftrightarrow x_A = -2\ln(2)$.

$\boxed{\text{Le point d'intersection de } \Delta_1 \text{ et } \Delta_2 \text{ a pour coordonnées : } A(-2\ln(2), -\ln(2)).}$

Par ailleurs, $f(-2\ln(2)) = \ln\left(\dfrac{2e^{-4\ln(2)}+1}{e^{-2\ln(2)}+2}\right) = \ln\left(\dfrac{2(e^{\ln(2)})^{-4}+1}{(e^{\ln(2)})^{-2}+2}\right) = \ln\left(\dfrac{2\times 2^{-4}+1}{2^{-2}+2}\right)$

soit : $f(-2\ln(2)) = \ln\left(\dfrac{\frac{1}{8}+1}{\frac{1}{4}+2}\right) = \ln\left(\dfrac{9}{8}\times\dfrac{4}{9}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

On remarque que $f(x_A) = y_A$ donc $\boxed{\text{le point } A \text{ appartient à } \mathcal{C}_f.}$

(b) On étudie le signe de $\varphi(x) = f(x) - (-\ln(2)) = \ln\left(\dfrac{4e^{2x}+2}{e^x+2}\right)$

$\varphi(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 4e^{2x}+2 \leqslant e^x+2 \Leftrightarrow 4e^x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) = -2\ln(2)$

donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } \Delta_1 \text{ sur }]-\infty, -2\ln(2)].}$

(c) On étudie le signe de $\psi(x) = f(x) - (x+\ln(2)) = \ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$

$\psi(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{2}e^{-2x} \leqslant 1+2e^{-x} \Leftrightarrow 1 \leqslant 4e^x \Leftrightarrow x \geqslant \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) = -2\ln(2)$

donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } \Delta_2 \text{ sur } [-2\ln(2), +\infty[.}$

(d) On étudie le signe de $\theta(x) = f(x) - x = \ln\left(\dfrac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right) - \ln(e^x) = \ln\left(\dfrac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+2e^x}\right)$

$\theta(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2e^{2x}+1 \geqslant e^{2x}+2e^x \Leftrightarrow e^{2x}-2e^x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (e^x-1)^2 \geqslant 0$

et pour tout réel x, on a $(e^x-1)^2 \geqslant 0$ donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } T \text{ sur } \mathbf{R}.}$

(e) Courbe représentative de f :