DS n°1, mathématique

Durée : 2 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 1 page et une feuille annexe à rendre.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Résolution d'une inéquation *(4 points)*

On considère l'inéquation $(E) : \dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{3x-4} \geqslant 1$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de (E).
2. Étudier le signe de $\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{3x-4}$ selon les valeurs du réel x.
3. On donne : $25^2 - 4 \times 8 \times 18 = 49$.
   Résoudre l'inéquation (E).

Exercice 2 : Étude d'une fonction *(16 points)*

On définit la fonction f par son expression : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
2. (a) Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes, qu'on précisera.
3. Donner le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}'$ de f, et déterminer l'expression de sa dérivée f'.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   *On y portera les limites trouvées à la question **2(a)**.*
5. (a) Montrer que f admet un maximum M sur $\mathcal{D}$, vérifiant : $M = \dfrac{2}{e}$.
   (b) En déduire que, pour tout x réel strictement positif, $\ln(x) < \sqrt{x}$.
6. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
7. **Étude de la position ralative de $\mathcal{C}_f$ et T**
   Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on pose : $u(x) = \sqrt{x}\left(\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - x + 1\right)$.
   (a) Montrer que : pour tout $x \in \mathcal{D}$, $u'(x) = \dfrac{2 + x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{3}{2}}}{2x}$.
   (b) Soit $t \in \mathbf{R}$. Donner la forme développée de l'expression : $(3t^2+3t+2)(1-t)$.
   (c) En déduire le signe de $u'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}$.
   On pourra poser : $t = x^{\frac{1}{2}}$.
   (d) Montrer que : pour tout $x \in \mathcal{D}$, $u(x) \leqslant 0$.
   (e) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T.
8. Sur la feuille annexe à rendre avec votre copie, tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ en tenant compte de tous les résultats précédents.
   Certains renseignements figurent déjà sur cette feuille réponse.

Annexe de l'exercice 2

À rendre avec votre copie.

NOM : .... CLASSE : ....

Titre : ....