Exercice 1 : Résolution d'une inéquation

1. (E) est définie pour $x \in \mathbf{R}$ tel que : $\begin{cases} 3x - 4 \neq 0 \\ x^2 + x - 2 \geqslant 0 \end{cases}$

   On étudie le signe de $x^2 + x - 2$ en factorisant ce trinôme : $\Delta = 9 > 0$, $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1$. Ainsi : $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ donc $x^2 + x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 1$.

   Par ailleurs, $3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$. $\boxed{\text{L'ensemble de définition de } (E) \text{ est } \mathcal{D}_{(E)} =]-\infty, -2] \cup [1, \tfrac{4}{3}[\cup]\tfrac{4}{3}, +\infty[.}$

2. Pour tout $x \in \mathcal{D}_{(E)}$, $\sqrt{x^2 + x - 2} \geqslant 0$ donc le signe de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{3x - 4}$ est celui de $3x - 4$.

   Conclusion : $\boxed{f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \tfrac{4}{3}\ .}$

3. D'après la question précédente, (E) n'a pas de solution sur $]-\infty, \frac{4}{3}]$. Soit $x > \dfrac{4}{3}$.

   Alors $\dfrac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{3x - 4} \geqslant 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x - 2} \geqslant 3x - 4$ (multiplication par $3x - 4 > 0$)

   $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geqslant (3x - 4)^2$ (application du carré, croissant sur $\mathbf{R}_+$)

   $\Leftrightarrow 8x^2 - 25x + 18 \leqslant 0$ (après développement, et regroupement des termes)

   On obtient une inéquation de degré 2, de discriminant $\Delta_2 = (-25)^2 - 4 \times 8 \times 18 = 7^2$.

   Les racines sont $x_3 = \dfrac{25 - 7}{16} = \dfrac{9}{8}$ et $x_4 = \dfrac{25 + 7}{16} = 2$.

   Le trinôme est négatif sur $[x_3, x_4]$ (intérieur des racines). Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_{(E)} =]\tfrac{4}{3}, 2].}$

Exercice 2 : Étude d'une fonction

1. $\ln(x)$ existe quand $x > 0$. $\sqrt{x}$ existe quand $x \geqslant 0$. $\sqrt{x} \neq 0$ quand $x \neq 0$.

   Conclusion : $\boxed{\text{l'ensemble de définition } \mathcal{D} \text{ de } f \text{ est : } \mathcal{D} = \mathbf{R}_+^\star.}$

2. (a) En 0 : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0^+$ donc par opération : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty.}$

   En $+\infty$: on a une forme indéterminée de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

   Par croissances comparées : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$

   (b) D'après la question précédente, $\mathcal{C}_f$ admet :
   - en 0 une asymptote verticale : l'axe des ordonnées,
   - en $+\infty$ une asymptote horizontale : l'axe des abscisses.

3. Par opérations, f est dérivable en $x \in \mathcal{D}$ tel que $x \neq 0$, donc $\mathcal{D}' = \mathcal{D} = \mathbf{R}_+^\star$.

   Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times \sqrt{x} - \ln(x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$ soit : $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ f'(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}}.}$

4. $2 - \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant e^2$ donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]0, e^2]$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

5. (a) On calcule le maximum M de la fonction : $M = f(e^2) = \dfrac{\ln(e^2)}{\sqrt{e^2}} = \dfrac{2}{e}$.

   (b) $e \approx 2,7$ donc $M < 1$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $f(x) < 1$ donc $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ \ln(x) < \sqrt{x}.}$

6. On calcule : $f(1) = \dfrac{\ln(1)}{\sqrt{1}} = 0$ puis $f'(1) = \dfrac{2 - \ln(1)}{2 \times 1 \times \sqrt{1}} = 1$.

   L'équation de la tangente en 1 à $\mathcal{C}_f$ est : $y = 1(x - 1) + 0$ soit $\boxed{T : y = x - 1.}$

7. (a) Pour tout $x > 0,\ u(x) = \ln(x) - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$ en développant.

Par opérations, u est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et pour tout $x > 0,\ u'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

et en réduisant au même dénominateur : $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ u'(x) = \dfrac{2 - 3x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}{2x}.}$

(b) On développe : $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbf{R},\ (3t^2 + 3t + 2)(1 - t) = -3t^3 + t + 2.}$

(c) On pose $t = x^{\frac{1}{2}}$. On a : $u'(x) = \dfrac{2 + t - 3t^3}{2t^2}$ donc du signe de $2 + t - 3t^3$.

D'après la question précédente, $2 + t - 3t^3 = (3t^2 + 3t + 2)(1 - t)$.

Le discriminant du trinôme est : $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 2 < 0$ donc ce trinôme est toujours strictement positif.

Ainsi, le signe de $2 + t - 3t^3$ est celui de $(1 - t)$: positif quand $t \leqslant 1$ et négatif quand $t \geqslant 1$.

Mais $t = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, donc : $\boxed{u'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in]0, 1].}$

(d) u est donc croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.

La fonction u admet donc un maximum en $x = 1$, égal à $u(1) = \ln(1) - 1^{\frac{3}{2}} + 1^{\frac{1}{2}} = 0$.

En conclusion, $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ u(x) \leqslant 0.}$

(e) Soit $x \in \mathcal{D}$. On a : $f(x) - (x - 1) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - x + 1 = \dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}$.

Mais $u(x) \leqslant 0$ et $\sqrt{x} \geqslant 0$, donc pour tout $x \in \mathcal{D},\ f(x) - (x - 1) \leqslant 0$.

$\boxed{\text{La courbe } \mathcal{C}_f \text{ est toujours en dessous de sa tangente } T.}$

8. Courbe représentative de la fonction f :