DS n°2, mathématique

Durée : 3 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 1 page recto/verso.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Questions mêlées *(4 points)*

Cet exercice comporte quatre questions indépendantes. Les réponses doivent être données sans justification.
Chaque réponse correcte rapporte 1 *point.*
Une réponse fausse, ou une absence de réponse n'enlève pas de point.

Question 1 : Que vaut $A = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$?

Question 2 : Pour a, b des réels quelconques, on pose : $B = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.
Exprimer B uniquement en fonction de $\cos(a)$ et de $\cos(b)$.

Question 3 : Si $f(x) = \ln\left(\cos(2x) - \frac{1}{2}\right)$, alors que vaut l'ensemble de définition de f ?

Question 4 : Un hexagone régulier possède 6 côtés de longueur 1. Calculer l'aire de cet hexagone.

Exercice 2 *(8 points)*

On définit la fonction f par son expression : pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = \cos(3t)\cos^3(t)$.
On nomme $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. **Informatique** : En langage *Python*, définir la fonction f.
   On prendra soin d'effectuer les importations nécessaires.
2. Montrer que f est périodique de période π.
3. Étudier la parité de la fonction f.
4. Déduire des questions précédentes qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   On précisera les transformations géométriques permettant de compléter $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbf{R}$, à partir de sa connaissance sur I.
5. Montrer que : pour tout réel t, $f(\pi - t) = f(t)$.
6. Étudier la dérivabilité de f, et donner l'expression de sa dérivée.
7. Rappeler la formule d'addition du sinus.
8. Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f'(t) = -3\cos^2(t)\sin(4t)$.
9. En déduire le signe de $f'(t)$ pour $t \in I$.
10. Dresser le tableau de variations de f sur I.
    On y portera les valeurs remarquables.
11. Résoudre sur I l'équation $f(t) = 0$.
12. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Exercice 3 *(8 points)*

Pour un angle $\theta \in]-\pi, \pi]$, on définit $f(\theta) = \dfrac{3}{1 + \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)}$.

1. Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi, \pi]$, on a : $\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) = 2\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
2. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation : $1 + 2\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.
3. En déduire que l'ensemble de définition de f est : $\mathcal{D}_f = \left]-\pi, \dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{3}, \pi\right[$.
4. Étudier la dérivabilité de f, et donner l'expression de sa dérivée.
5. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation : $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) \geqslant 0$.
6. En déduire le signe de $f'(\theta)$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
7. Calculer les valeurs remarquables qui apparaissent dans ce tableau.
8. En déduire le signe de $f(\theta)$ selon les valeurs de $\theta \in \mathcal{D}_f$.
9. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et préciser les asymptotes à la courbe représentative de f.
10. En utilisant tous les résultats précédents, donner l'allure de la courbe représentative de f sur son ensemble de définition.

Fin du sujet