

Exercice 1 : Soit x un réel strictement positif.

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a l'inégalité de Bernoulli :

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

Exercice 2 : Prouver : $\forall n \in \mathbf{N}, n! \geq 2^{n-1}$.

Exercice 3 : Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par : $a_0 = 1, a_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, a_n = 2n + 1$.

Exercice 4 : Soit $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par :

$$F_0 = F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que :

$$\forall n \geq 1, F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout entier k , on pose $a_k = 3k + 1$.

1. Écrire en extension (c'est-à-dire sans le symbole Σ) puis calculer les sommes suivantes :

$$\text{a. } S_1 = \sum_{k=2}^6 a_{2k}, \quad \text{b. } S_2 = \sum_{k=4}^{10} a_{10-k}, \quad \text{c. } S_3 = \sum_{k=0}^{2n} a_k.$$

2. Écrire à l'aide du signe Σ la somme T suivante puis la calculer :

$$T = a_7 + a_9 + a_{11} + \cdots + a_{49} + a_{51}.$$

Exercice 6 : Calculer :

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{k=0}^{n+1} (2-k^2) & 4. \sum_{k=n-1}^{2n} (k+3)^2 & 7. \sum_{k=1}^{n-1} (3^{2k+1} - 3^{2k-1}) \\ 2. \sum_{j=1}^{2n} \frac{j^2}{n} & 5. \sum_{k=0}^n (k^2 + n + 3) & 8. \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1} \\ 3. \sum_{j=3}^{n+2} (j-2)^2 & 6. \sum_{k=0}^n a^k 2^{3k} b^{-k} & 9. \sum_{k=2}^{n^2} (1-a^2)^{2k+1} \end{array}$$

Exercice 7 : Soit un entier $n \geq 2$. On pose, pour x dans $]0, 1[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

En dérivant f de deux façons différentes, montrer que pour tout x dans $]0, 1[$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{-nx^{n-1} + nx^n + 1 - x^n}{(1-x)^2}.$$

Exercice 8 : Étudier la convergence de la suite de terme général en utilisant des majorations/minorations :

$$\begin{array}{l} 1. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} \quad (n \in \mathbf{N}^*). \\ 2. v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} \quad (\text{indication : majorer } \frac{1}{(k+1)^2} \text{ par } \frac{1}{k(k+1)} \text{ et utiliser un télescope}). \\ 3. w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (n \in \mathbf{N}^*). \end{array}$$

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbf{N}$.

L'objectif de l'exercice est de proposer une autre méthode pour calculer $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$.

1. Calculer de deux manières $\sum_{k=0}^n [(k+1)^3 - k^3]$.
2. En déduire une expression en fonction de n de S_n ne faisant pas intervenir le symbole $\sum$.

Exercice 10 : Pour tout entier n dans $\mathbf{N}$ on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n k.k!$

Simplifier l'expression de S_n pour tout entier n en remarquant que $k = (k+1) - 1$.

Exercice 11 : Soit x un réel et $n \in \mathbf{N}^*$. Simplifier :

$$\begin{array}{lll} 1. A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k & 4. D = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} & 7. G = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k \\ 2. B = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k & 5. E = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k & 8. H = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{k+1} \\ 3. C = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k} & 6. F = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} 3^k & 9. K = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{3+kt}, \quad t \in \mathbf{R}. \end{array}$$

Exercice 12 : Calculer :

$$\begin{array}{lll} 1. A = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} a^{-j}, & 3. C = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}, & 5. E = \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \frac{k}{l+1}, \\ 2. B = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} b^k, & 4. D = \sum_{p=0}^n \sum_{q=1}^m p(q^2+1), & 6. F = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}. \end{array}$$

Exercice 13 : Soit a un réel, n un entier naturel, t un réel. Déterminer la valeur de :

$$C(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a+kt) \quad \text{et} \quad S(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(a+kt).$$

Indication : on pourra chercher à calculer $C(t) + iS(t)$.

Exercice 14 : Exprimer à l'aide des factorielles le produit

$$\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}.$$

Que reconnaît-on ?