Devoir Maison n°2

Exercice 1 : Valeurs particulières de cos et sin

Le but de cet exercice est de calculer : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

On pose : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, et $S = \sum_{k=0}^{4} \omega^k$.

1. Que vaut ω^5 ? En déduire que : $S = 0$.
2. Montrer que : $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et que : $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
3. En déduire que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$.
   Indication : on pourra s'intéresser à la partie réelle de S.
4. Montrer que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$.
   Indication : penser à la formule de linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$.
5. Résoudre dans $\mathbf{C}^2$ le système : $\begin{cases} u + v = -\frac{1}{2} \\ uv = -\frac{1}{4} \end{cases}$
6. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

* * *

Exercice 2 : Un calcul de somme

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 1$. On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$.

1. **Informatique**
   Écrire en langage *Python* une fonction `somme` prenant pour argument un entier n et renvoyant la valeur de la somme S_n.

   Pour vérification, `>>> somme(20)` *devra renvoyer* 39845890.
2. **Calcul à l'aide d'une somme double**
   (a) Vérifier que, pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} 2^k = S_n$.
   (b) En changeant l'ordre de sommation dans la somme-double précédente, montrer que :
   $$\forall n \geqslant 1,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} (2^{n+1} - 2^i).$$
   (c) Déterminer alors la valeur de S_n.
3. **Détermination de S_n par récurrence**
   Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$.

* * *