

## I Définitions

1. Suites réelles, notations
2. Suites positives, négatives
3. Suites périodiques
4. Suites majorées, minorées, bornées
5. Suites monotones, strictement monotones
6. Méthodes d'étude de monotonie
7. Suites extraites de rang pair ou impair

## II Convergence, divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$

1. Définition de la convergence ( $\rightarrow$  *Annexe*)
2. Divergence vers  $\pm\infty$  ( $\rightarrow$  *Annexe*)
3. Autres cas de divergence
4. Premiers théorèmes de convergence ( $\rightarrow$  *Annexe*)
5. Opérations sur les limites ( $\rightarrow$  *Annexe*)

## III Limites et inégalités

1. Signe d'une suite de limite non nulle
2. Passage à la limite dans les inégalités ( $\rightarrow$  *Annexe*)
3. Théorème d'encadrement (des gendarmes) ( $\rightarrow$  *Annexe*)
4. Produit d'une suite bornée et d'une suite convergente vers 0 ( $\rightarrow$  *Annexe*)
5. Théorème de comparaison ( $\rightarrow$  *Annexe*)

## IV Cas des suites monotones

1. Propriété de la borne supérieure dans  $\mathbf{R}$
2. Théorème de convergence monotone ( $\rightarrow$  *Annexe*)
3. Suites adjacentes ( $\rightarrow$  *Annexe*)

## V Comparaison des suites réelles

1. Relation de négligeabilité ( $\rightarrow$  *Annexe*)
2. Opérations sur les quantités négligeables ( $\rightarrow$  *Annexe*)
3. Croissances comparées des suites usuelles ( $\rightarrow$  *Annexe*)
4. Suites équivalentes ( $\rightarrow$  *Annexe*)
5. Opérations sur les suites équivalentes ( $\rightarrow$  *Annexe*)
6. Équivalence et comportement asymptotique ( $\rightarrow$  *Annexe*)
7. Équivalents usuels ( $\rightarrow$  *Annexe*)

# Annexes

2.1 Suite convergente : La suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  **converge** vers le réel  $\ell$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

2.2a Divergence vers  $+\infty$  : La suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  **diverge** vers  $+\infty$  si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

2.2b Divergence vers  $-\infty$  : La suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  **diverge** vers  $-\infty$  si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

2.4a Unicité de la limite : Si  $(u_n)$  est une suite réelle convergente, alors sa limite est unique.

2.4b Convergence et suites extraites :  $\lim u_n = \ell \Leftrightarrow \lim u_{2n} = \ell$  et  $\lim u_{2n+1} = \ell$

2.4c : Toute suite convergente est bornée.

2.5 Opérations sur les limites :

**\* Somme**

|                   |                |           |           |           |           |           |
|-------------------|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim u_n$        | $\ell$         | $\ell$    | $\ell$    | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim v_n$        | $\ell'$        | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim(u_n + v_n)$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | <b>FI</b> |

**\* Produit**

|                        |             |            |            |           |            |            |           |           |           |           |
|------------------------|-------------|------------|------------|-----------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim u_n$             | $\ell$      | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $0$       | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $0$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim v_n$             | $\ell'$     | $+\infty$  | $+\infty$  | $+\infty$ | $-\infty$  | $-\infty$  | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim(u_n \times v_n)$ | $\ell\ell'$ | $+\infty$  | $-\infty$  | <b>FI</b> | $-\infty$  | $+\infty$  | <b>FI</b> | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

**\* Inverse**

|                      |                  |           |           |           |           |           |
|----------------------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim u_n$           | $\ell \neq 0$    | $0$       | $0^+$     | $0^-$     | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim \frac{1}{u_n}$ | $\frac{1}{\ell}$ | <b>FI</b> | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$       | $0$       |

3.2 Passage à la limite :

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes telles que :  $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$  ou  $u_n < v_n$

Alors, on a :  $\lim u_n \leq \lim v_n$

3.3 Théorème d'encadrement : Soient  $(u_n), (v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites réelles telles que :

- les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers la même limite  $\ell \in \mathbf{R}$
- $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$

Alors, la suite  $(v_n)$  converge, et sa limite est  $\ell$ .

3.4 Suite bornée et suite convergente vers 0 :

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que  $(u_n)$  est bornée et  $(v_n)$  converge vers 0.

Alors, la suite  $(u_n \times v_n)$  converge vers 0.

3.5 Théorème de comparaison : Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que :  $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$ .

- Si la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ , alors la suite  $(v_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- Si la suite  $(v_n)$  diverge vers  $-\infty$ , alors la suite  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

4.2 Théorème de convergence monotone :

- Toute suite réelle  $(u_n)$  croissante et majorée converge et  $\lim u_n = \sup \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$ .
- Toute suite réelle  $(u_n)$  croissante et non majorée diverge vers  $+\infty$ .
- Toute suite réelle  $(u_n)$  décroissante et minorée converge et  $\lim u_n = \inf \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$ .
- Toute suite réelle  $(u_n)$  décroissante et non minorée diverge vers  $-\infty$ .

4.3a Définition des suites adjacentes : Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites **adjacentes** si et seulement si l'une est croissante, l'autre est décroissante, et leur différence converge vers 0.

4.3b Théorème des suites adjacentes :

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont des suites adjacentes, alors elles convergent et ont même limite  $\ell \in \mathbf{R}$ .

De plus, on a (en appelant  $(u_n)$  la suite croissante) :  $\forall n \in \mathbf{N}, u_0 \leq u_n \leq \ell \leq v_n \leq v_0$

5.1 Relation de négligeabilité :  $(u_n)$  est **négligeable** devant  $(v_n)$  si et seulement si :  $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$ .

On note alors :  $u_n = o(v_n)$ .

5.2 Opérations sur les quantités négligeables :

Soient  $(u_n), (v_n), (w_n)$  et  $(x_n)$  des suites réelles. Soient  $\lambda \in \mathbf{R}^*$  et  $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ .

- Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $u_n = o(\lambda v_n)$ .
- Si  $u_n = o(v_n)$  et  $v_n = o(w_n)$ , alors  $u_n = o(w_n)$ .
- Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $u_n w_n = o(v_n w_n)$ .
- Si  $u_n = o(v_n)$  et  $w_n = o(x_n)$ , alors  $u_n w_n = o(v_n x_n)$ .
- Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $(u_n)^\alpha = o((v_n)^\alpha)$ , dès lors que ces quantités sont bien définies.
- Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $\frac{1}{v_n} = o\left(\frac{1}{u_n}\right)$ .
- Si  $u_n = o(w_n)$  et  $v_n = o(w_n)$ , alors  $u_n + v_n = o(w_n)$ .

5.3 Croissances comparées : On note ici  $\ll$  le fait d'être « négligeable devant ».

Soient  $\alpha, \beta > 0$  et  $a > 1$  trois réels. Alors on a :  $(\ln n)^\alpha \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$

5.4 Suites équivalentes : Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites réelles.

La suite  $(u_n)$  est **équivalente** à la suite  $(v_n)$  si et seulement si :  $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ .

On note alors :  $u_n \sim v_n$ .

5.5 Opérations sur les suites équivalentes :  $\alpha \in \mathbf{R}$

- |                                                                 |                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| • $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n + v_n \sim v_n$                 | • $u_n \sim v_n \Rightarrow (u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha$                             |
| • $u_n \sim v_n \Leftrightarrow v_n \sim u_n$                   | • $(u_n \sim v_n \wedge w_n \sim x_n) \Rightarrow u_n w_n \sim v_n x_n$                 |
| • $u_n \sim v_n \Rightarrow \alpha u_n \sim \alpha v_n$         | • $(u_n \sim v_n \wedge w_n \sim x_n) \Rightarrow \frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{x_n}$ |
| • $(u_n \sim v_n \wedge v_n \sim w_n) \Rightarrow u_n \sim w_n$ |                                                                                         |

5.6 Nature des suites équivalentes : **Deux suites équivalentes sont de même nature.**

Si l'une converge vers  $\ell$ , alors l'autre aussi. Si l'une diverge vers  $+\infty$ , alors l'autre aussi...

5.7a Équivalents usuels en 0 : Soit  $(u_n)$  une suite réelle convergente vers 0. Alors on a :

- |                                          |                                                                                |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| • $\sin u_n \sim u_n$                    | • $\ln(1 + u_n) \sim u_n$                                                      |
| • $\tan u_n \sim u_n$                    | • $e^{u_n} - 1 \sim u_n$                                                       |
| • $\cos u_n - 1 \sim -\frac{(u_n)^2}{2}$ | • $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n \quad (\forall \alpha \in \mathbf{R})$ |

5.7b Autre équivalent usuel : Une suite polynomiale est équivalente à son monôme dominant.

Si  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_px^p$  avec  $a_p \neq 0$ , alors  $P(n) \sim a_p n^p$